

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМЕНІ С.П. ТИМОШЕНКА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

БОРИСЕНКО МАКСИМ ЮРІЙОВИЧ

УДК 539.3

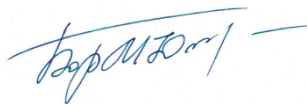
ДИСЕРТАЦІЯ

ЧИСЕЛЬНИЙ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ
КОЛИВАНЬ БАГАТОКУТНИХ ПЛАСТИН І ЦИЛІНДРИЧНИХ
ОБОЛОНОК З КОНСТРУКТИВНОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 — М.Ю. Борисенко

Науковий консультант: Григоренко Олександр Ярославович,
академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2025

АНОТАЦІЯ

Борисенко М.Ю. Чисельний та експериментальний аналіз вільних коливань багатокутних пластин і циліндричних оболонок з конструктивною неоднорідністю. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2025.

Дисертація присвячена розвиненню підходів до чисельного та експериментального аналізу вільних коливань пружних багатокутних пластин та циліндричних оболонок різного поперечного перерізу з конструктивною неоднорідністю та встановленні залежностей частот та форм вільних коливань пластин та оболонок від зміни різних конструктивних параметрів.

Одержано нові розв'язки широкого класу задач динаміки багатокутних пластин та некругових циліндричних оболонок, на основі яких проведено аналіз впливу конструктивної неоднорідності, геометричних параметрів, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов на спектр частоти та форми вільних коливань пружних механічних об'єктів, що розглядаються.

Розвинено чисельний підхід на основі методу скінченних елементів для розрахунку частот та форм вільних коливань ізотропних багатокутних пластин з отвором і без та замкнутих і незамкнутих циліндричних оболонок різного поперечного перерізу, різної товщини, з різними варіантами граничних умов.

Розроблено комбінований підхід для розрахунку частот вільних коливань ізотропних багатокутних пластин різної товщини на основі модифікованої формули для розрахунку частот вільних коливань ізотропної прямокутної пластини та розраховані методом скінченних елементів

коефіцієнти для кожної багатокутної пластини з різними граничними умовами, які залежать від співвідношення товщини до сторони пластини.

Розвинено експериментальний підхід на основі резонансного методу та створено віброкомплекс для демонстрації коливань в реальному часі та визначення з достатнім ступенем достовірності частот і форм вільних коливань багатокутних пластин.

Розвинено експериментальний підхід на основі стробогологафічної інтерферометрії та створено стробокомплекс для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та товстостінних циліндричних оболонок, який в реальному часі демонструє коливання поверхні пружного тіла у вигляді інтерференційних картин, дає можливість змінювати режим віброзбудження та амплітуду коливань, з високим ступенем достовірності досліджувати спектр частот і форм вільних коливань.

Різними підходами побудовано нові розв'язки задач динаміки для таких пластин та оболонок:

- трикутні, чотирикутні, п'ятикутні та шестикутні пластини різної товщини з різними варіантами вільних та жорстко закріплених країв;
- трикутні, чотирикутні, п'ятикутні, шестикутні та круглі пластини з отвором з різними варіантами вільних та жорстко закріплених країв та отвору;
- замкнуті та незамкнуті циліндричні оболонки еліптичного поперечного перерізу з різним значенням ексцентриситету сталої та змінної товщини з різним характером розкриття з різними граничними умовами на торцях;
- замкнуті та незамкнуті циліндричні оболонки гофрованого поперечного перерізу з різною кількістю гофр з різним характером розкриття з різними граничними умовами на торцях;
- товстостінні циліндричні оболонки з різними граничними умовами на торцях.

Досліджено вільні коливання широкого класу пластин і оболонок з різною конструктивною неоднорідністю та отримано нові результати у вигляді числових значень частот та ілюстрацій форм вільних коливань, проведено порівняння результатів отриманих за допомогою різних розроблених підходів.

На основі результатів отриманих різними чисельними та експериментальними підходами проведено аналіз особливостей динамічних характеристик широкого класу неоднорідних пластин і оболонок, виявлені закономірності впливу геометричних параметрів, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов на спектр частот і форм вільних коливань кожного з розглянутих пружних тіл.

Отримані результати та розвинені підходи можуть бути використанні при розв'язанні широкого класу практичних задач визначення динамічних характеристик вільних коливань пластинчастих та оболонкових елементів з різною конструктивною неоднорідністю; розвинений чисельний підхід дає можливість отримувати достовірну інформацію про спектр частот і форм вільних коливань елементів конструкції в умовах максимально наближених до реальних умов експлуатації без значних затрат коштів та часу, змінюючи різні параметри, обирати оптимальні геометричні розміри, економічно вигідні матеріали та способи закріплення для забезпечення міцності, стійкості та надійності конструкції; розроблений комбінований підхід дає можливість швидко визначити частоти і форми вільних коливань багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами; розвинені експериментальні підходи дають можливість в реальному часі демонструвати вільні коливання пружних тіл, а одержані результати застосовувати для оцінки результатів, отриманих різними теоретичними методами.

Ключові слова: багатокутні пластини, циліндричні оболонки гофрованого поперечного перерізу, частота вільних коливань, метод скінченних елементів, резонансний метод, метод стробоголографічної інтерферометрії.

SYMMARY

Borysenko M.Yu. Numerical and experimental analysis of free vibrations of polygonal plates and cylindrical shells with structural heterogeneity. – Manuscript.

Thesis of candidate for a degree of doctor of technical sciences, speciality 01.02.04 – Mechanics of deformable solid. – S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2025.

The dissertation is devoted to the development of approaches to the numerical and experimental study of free vibrations of elastic polygonal plates and cylindrical shells of various cross-sections with structural heterogeneity and establishing the dependence of frequencies and forms of free vibrations of plates and shells on various structural parameters.

A numerical approach based on the finite element method has been developed to calculate the frequencies and forms of free vibrations of isotropic polygonal plates with and without holes, as well as closed and open cylindrical shells of different cross-sections, different thicknesses, and with different boundary conditions.

A new combined approach has been developed to determine the frequencies of free vibrations of isotropic polygonal plates of different thicknesses based on a modified formula for calculating the frequencies of free vibrations of an isotropic rectangular plate, and the coefficients of the vibration forms and boundary conditions have been established for the considered polygonal plates with various boundary conditions depending on the ratio of the thickness to the side of the plate.

An experimental approach based on the resonance method was developed, and a vibration complex was created to demonstrate real-time vibrations and determine with a sufficient degree of reliability the frequencies and forms of free vibrations of n -angle plates.

An experimental approach based on stroboscopic interferometry was developed, and a strobocomplex was created to determine the frequencies and

forms of free vibrations of polygonal plates and thick-walled cylindrical shells, which demonstrates real time vibrations of the surface of an elastic body in the form of interference patterns, allows changing the vibration excitation mode and the amplitude of vibrations, and with a high degree of reliability to study the spectrum of frequencies and forms of free vibrations.

The free vibrations of a wide class of plates and shells with different structural heterogeneity were investigated, and new results were obtained in the form of numerical values of frequencies and illustrations of the forms of free vibrations, and the results obtained using various developed approaches were compared.

Based on the results obtained by various numerical and experimental approaches, an analysis of the peculiarities of the dynamic characteristics of a wide class of heterogeneous plates and shells was carried out, the regularities of the influence of geometric parameters, physical and mechanical characteristics of the material and boundary conditions on the frequency spectrum and forms of free vibrations of each of the considered elastic bodies were revealed.

The obtained results and developed approaches can be used in solving a wide class of practical problems of determining the dynamic characteristics of free vibrations of plate and shell elements with different structural heterogeneity. The developed numerical approaches allow obtaining reliable information about the frequency spectrum and forms of free vibrations of structural elements in conditions as close as possible to real operating conditions without significant costs and time, changing various parameters to choose optimal geometric dimensions, economically advantageous materials and fastening methods to ensure the strength, stability and reliability of the structure. The developed experimental approaches make it possible to demonstrate real time free vibrations of elastic bodies, and to use the obtained results to assess the reliability of the results obtained by various theoretical and experimental methods.

The results obtained by the combined approach were transferred for implementation in the calculation practice of the state enterprise "Design Bureau

"Pivdenne" named after M.K. Yangel".

The results of the dissertation research were used within the framework of the implementation of the target program on defence topics in the direction of applied research and development.

Key words: polygonal plates, cylindrical shells of corrugated cross-section, frequency of free vibrations, finite element method, resonance method, stroboscopic interferometry method.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Статті в закордонних виданнях

1. Borysenko M, Zavorodnii A., Skupskyi R. Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone. J. Appl. Math. Comput. Mech. **18** (1), 5-13 (2019). <https://doi.org/10.17512/jamcm.2019.1.01> (**Web of Science**)
2. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Y. Free Vibrations of an Open Non-circular Cylindrical Shell of Variable Thickness. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W. (eds) Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials, vol 134. Springer, Cham. 141-154 (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_8 (**Scopus, Q4, SJR – 0.168**)
3. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Boreiko N.P. Free Vibration Corrugated Open Cylindrical Shells. In: Altenbach H., Bauer S., Eremeyev V., Mikhasev G., Morozov N. (eds) Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. Advanced Structured Materials, vol 151. Springer, Cham. 63-74 (2021). https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_6 (**Scopus, Q4, SJR – 0.168**)
4. Grigorenko A., Borysenko M., Boychuk O., Boreiko N. Numerical Analysis of Free Vibration Frequencies of Hexagonal Plate. In: Altenbach H., Bogdanov V., Grigorenko A.Y., Kushnir R.M., Nazarenko V.M., Eremeyev V.A. (eds) Selected

Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials, vol 204. Springer, Cham. 201-220 (2024). https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_15 (Scopus, Q4, SJR – 0.168)

Статті у фахових наукових виданнях України

5. Будає В.Д., Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В. Розв'язування задачі про вільні коливання некругової циліндричної оболонки на основі методу скінченних елементів. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Вип. 27, 24-33 (2017).
6. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Пригода О.П. Чисельний розрахунок частот вільних коливань некругової циліндричної оболонки з жорстко закріпленими торцями. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. Вип. 1, 91-103 (2017).
7. Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В., Пригода А.П. Численное определение частот и форм свободных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки. Прикл. механика. **54** (1), 90-100 (2018).
 Те саме: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Prigoda A.P. Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell. Int. Appl. Mech. **54** (1), 75-84 (2018).
<https://doi.org/10.1007/s10778-018-0861-7> (Scopus, Q3, SJR – 0.211)
8. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Новицький В.С. Застосування експериментального і чисельного методів до дослідження вільних коливань прямокутних пластин. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Вип. 29, 103-112 (2019).
<https://doi.org/10.15421/4219009>
9. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельний аналіз вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Вип. 2, 51-58 (2019).
<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/2.5>

10. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Новицький В.С. Чисельний аналіз вільних коливань прямокутних пластин на основ різних підходів. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. Вип. 1, 33-41 (2019). <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2019-1-05>
11. Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В. Свободные колебания незамкнутой цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения. Прикл. механика. **56** (4), 3-14 (2020).
Те саме: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Free Vibrations of an Open Elliptical Cylindrical Shell. Int. Appl. Mech. **56** (4), 389-401 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01023-9> (**Scopus, Q3, SJR – 0.218**)
12. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин методом скінченних елементів. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Вип. 1-2, 61-66 (2020). <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.10>
13. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин з вільними краями. Мат. методи та фіз.-мех. Поля. **63** (3), 28-39 (2020).
Те саме: Grigorenko O.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V. Numerical Evaluation of Frequencies and the Modes of Free Vibrations of Isosceles Triangular Plates with Free Edges. J. Math. Sci. **273**, 27-43 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06481-3> (**Scopus, Q3, SJR – 0.302**)
14. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання трикутних пластин з отвором. Прикл. механіка. **57** (5), 46-56 (2021).
Те саме: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Vasil'eva L.Ya. Free Vibrations of Triangular Plates with a Hole. Int. Appl. Mech. **57** (5), 534-542 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01104-3> (**Scopus, Q3, SJR – 0.242**)
15. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Про вільні коливання гофрованої замкнутої циліндричної оболонки. Прикл. механіка. **58** (1), С.

48-58 (2022).

Te same: Grigorenko O.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk O.V. Free Vibrations of a Corrugated Closed Cylindrical Shell. *Int. Appl. Mech.* **58** (1), 43-52 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01133-6> (**Scopus, Q3, SJR – 0.225**)

16. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Сперкач С.О., Безугла А.Д., Міхрін Е.О. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин. Доп. НАН України. № 6, 36-45 (2022). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.036>

17. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання незамкнутих циліндричних оболонок різного еліптичного поперечного перерізу. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **65** (1-2), 188-198 (2022). <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.1-2.188-198>

Te same: Grigorenko O.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Ya. Free Vibrations of Open Cylindrical Shells with Various Elliptic Cross Sections. *J. Math. Sci.* **282**, 836-848 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07219-5> (**Scopus, Q3, SJR – 0.280**)

18. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Шумська А.А. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань гофрованих замкнутих циліндричних оболонок. Прикл. механіка. **58** (5), 27-38 (2022).

Te same: Grigorenko O.Y., Borisenko M.Y., Boichuk O.V., Shums'ka A.A. Numerical determination of natural frequencies and modes of closed corrugated cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.* **58** (5), 520-532 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10778-023-01177-2> (**Scopus, Q3, SJR – 0.225**)

19. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Вільні коливання п'ятикутних пластин з отвором. Доп. НАН України. № 1, 24-31 (2023). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.024>

20. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Чисельне визначення частот вільних коливань гофрованої не замкнутої циліндричної оболонки. Доп. НАН України. № 2, 47-54 (2023).

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.047>

21. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Борейко Н.П., Бабуров В.В. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин з жорстко закріпленим одним краєм. Прикл. механіка. **61** (1), С. 35-44 (2025).

Статті в наукових виданнях України

22. Борисенко М.Ю. Бойчук О.В., Борисенко І.А., Роговцов Ю.О. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів. Геометричне моделювання та інформаційні технології. Вип. 2, 29-33 (2016).

Праці апробаційного характеру

23. Борисенко М.Ю. Бойчук О.В., Пригода О.П., Борисенко І.А. Комп'ютерне моделювання вільних коливань квадратних та круглих пластин. В: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Інформаційні технології в моделюванні. ІТМ – 2016», Миколаїв, 24-25 березня 2016 р., 14 (2016).
24. Будає В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот вільних коливань некругових циліндричних оболонок з жорстко закріпленими торцями. В: Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2016», Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 18-21 квітня 2016 р., 11 (2016).
25. Будає В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот вільних коливань некругових циліндричних оболонок змінної товщини з жорстко закріпленими торцями. В: Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних та фізико-математичних наук», Миколаїв, 22-24 вересня 2016 р., 113-114 (2016).
26. Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борисенко І.А., Роговцов Ю.О. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів. В: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції

«Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделювання об'єктів, явищ і процесів», Миколаїв, 19-21 жовтня 2016 р., 16 (2016).

27. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання незамкненої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу. В: Матеріали IV Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки», Київ, 20-30 серпня 2017 р., 28 (2017).
28. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вільні коливання циліндричних оболонок з некруговим гофрованим перерізом. В: Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук», Миколаїв, 13-15 вересня 2018 р., 33 (2018).
29. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань циліндричної оболонки з круговим гофрованим перерізом. В: Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т., Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Т. 2, 124-125 (2018).
30. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Визначення частот вільних коливань чотирикутних пластин складної форми. В: Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2019», Дніпро, Кам'янське, 15-18 квітня 2019 р., 40-41 (2019).
31. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин методом скінченних елементів. В: Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні», Харків, 05-08 жовтня 2020 р., 45-46 (2020).
32. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Визначення частот і форм вільних коливань шестикутної пластини з вільними краями. В: Тези доповіді Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2021», Дніпро, Кам'янське,

13-16 квітня 2021 р., 37-38 (2021).

33. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Пінчук Т. Застосування чисельного аналізу до визначення частот вільних коливань товстостінних оболонок. В: Збірник наукових праць «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук», Львів, 27-28 вересня 2021 р. 88-91 (2021).
34. Grigorenko A.Ya., Muller W.H., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V. Numerical and Experimental Approaches to Determining the Frequencies of Free Vibrations of Plates of Complex Shape. В: Матеріали VI Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки», Київ, 30-31 серпня 2021 р. (2021).
35. Борисенко М. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин. В: Матеріалах конференції молодих учених «Підстригачівські читання – 2022», Львів, 25–27 травня 2022 р. (2022).
36. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Борецько Н. Вільні коливання гофрованої замкнутої циліндричної оболонки змінної товщини. В: Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023», Львів, 23-25 травня 2023 р., 99-100 (2023).
37. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О. Чисельний аналіз вільних коливань тонкостінних та товстостінних циліндричних оболонок. В: Тези доповіді 11-тої Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», Львів, 24-26 вересня 2024р., 77-78 (2024).
38. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борецько Н.П. Вільні коливання шестикутних пластин з різними варіантами закріплення країв. В: Тези доповіді Міжнародної наукової конференції «Механіка: сучасність і перспективи – 2024», Київ, 7-11 жовтня 2024р., 163-164 (2024).
39. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Борецько Н. Вільні коливання шестикутних пластин з отвором. В: Збірник матеріалів міжнародної науково-технічної конференції «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення», Дніпро, 26-28 березня 2025р., 60-62 (2025).

ЗМІСТ

ВСТУП.....	19
1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	28
2. МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ І ФОРМ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИН І ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК	52
2.1. Основні співвідношення теорії пружності	52
2.2. Рівняння коливань оболонок.....	58
2.3. Рівняння коливань пластин	64
2.4. Визначення частот і форм вільних коливань МСЕ	70
2.4.1. Основні співвідношення МСЕ для plate-елемента	72
2.4.2. Рівняння вільних коливань в МСЕ	75
2.5. Визначення частот і форм вільних коливань методом стробоголографічної інтерферометрії.....	78
2.6. Визначення частот і форм вільних коливань резонансним методом	85
2.7. Результати та висновки.....	87
3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОКУТНИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	89
3.1. Вибір типу та розміру скінченного елемента для розрахунку пластин різної товщини.....	90
3.2. Оцінка достовірності отриманих результатів розрахунку МСЕ	96
3.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин ...	101
3.3.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин при різних граничних умовах	101
3.3.2. Розрахунок частот вільних коливань трикутних пластин при різних фізико-механічних характеристиках.....	106
3.3.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин різної товщини.....	109
3.3.4. Розрахунок частот та форм вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин	117

3.4. Розрахунок частот та форм вільних коливань чотирикутних пластин ..	121
3.4.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань чотирикутних пластин при різних граничних умовах.....	121
3.4.2. Розрахунок частот вільних коливань чотирикутних пластин при різних фізико-механічних характеристиках	126
3.4.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань чотирикутних пластин різної товщини	127
3.5. Розрахунок частот та форм вільних коливань п'ятикутних пластин	131
3.5.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань п'ятикутних пластин при різних граничних умовах	131
3.5.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань п'ятикутних пластин різної товщини.....	136
3.6. Розрахунок частот та форм вільних коливань шестикутних пластин....	139
3.6.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань шестикутних пластин при різних граничних умовах	139
3.6.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань шестикутних пластин різної товщини.....	145
3.7. Результати та висновки.....	147
4. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОКУТНИХ ПЛАСТИН З ОТВОРОМ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	149
4.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин з отворами	149
4.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин з круглими отворами різного радіусу	162
4.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань чотирикутних пластин з отвором	164
4.4. Розрахунок частот та форм вільних коливань п'ятикутних пластин з отвором	169

4.5. Розрахунок частот та форм вільних коливань шестикутних пластин з отворами	173
4.6. Результати та висновки.....	177
5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОКУТНИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ КОМБІНОВАНОГО ПІДХОДУ	179
5.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин різної товщини.....	179
5.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань чотирикутних пластин різної товщини.....	191
5.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань п'ятикутних пластин різної товщини.....	197
5.4. Розрахунок частот та форм вільних коливань шестикутних пластин різної товщини.....	202
5.5. Результати та висновки.....	205
6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ ТА ФОРМ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ БАГАТОКУТНИХ ПЛАСТИН	207
6.1. Експериментальне визначення частот та форм вільних коливань багатокутних пластин резонансним методом.....	207
6.1.1. Експериментальна установка і методика визначення частот і форм вільних коливань пластин резонансним методом	207
6.1.2. Визначення частот та форм вільних коливань трикутної пластини з отвором резонансним методом.....	210
6.1.3. Визначення частот та форм вільних коливань прямокутних пластин з отвором та без резонансним методом	211
6.1.4. Визначення частот та форм вільних коливань п'ятикутної пластини з отвором резонансним методом.....	215
6.1.5. Визначення частот та форм вільних коливань шестикутної пластини з отвором резонансним методом.....	217
6.1.6. Визначення частот та форм вільних коливань круглої пластини з отвором резонансним методом.....	218

6.2. Експериментальне визначення частот та форм вільних коливань багатокутних пластин методом стробоголографічної інтерферометрії	219
6.2.1. Експериментальна установка і методика визначення частот і форм вільних коливань пластин методом стробоголографічної інтерферометрії.....	219
6.2.2. Визначення частот та форм вільних коливань прямокутних пластин методом стробоголографічної інтерферометрії	221
6.3. Результати та висновки.....	223
7. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	225
7.1. Вибір типу та розміру скінченного елемента для розрахунку циліндричних оболонок	226
7.2. Оцінка достовірності отриманих результатів розрахунку.....	230
7.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу	235
7.3.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань замкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу при різних граничних умовах на обох торцях.....	235
7.3.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу	242
7.4. Розрахунок частот та форм вільних коливань циліндричних оболонок гофрованого поперечного перерізу	264
7.4.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань циліндричних оболонок гофрованого поперечного перерізу з різною кількістю гофр.....	264
7.4.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань замкнутої циліндричної оболонки гофрованого поперечного перерізу з різними граничними умовами з різних матеріалів	271

7.4.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки гофрованого поперечного перерізу з різними граничними умовами.....	277
7.5. Розрахунок частот та форм вільних коливань циліндричних оболонок різних товщин.....	284
7.6. Визначення частот та форм вільних коливань товстостінних оболонок методом стробогологафічної інтерферометрії.....	291
7.7. Результати та висновки.....	297
ВИСНОВКИ	300
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	303
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА	333
ДОДАТОК Б. ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ.....	340

ВСТУП

Актуальність теми. У багатьох галузях сучасної техніки, машинобудування та будівництва широке застосування знаходять багатокутні пластинчасті елементи, комбінацією яких можна отримати будь-яку складну форму корпусу космічного апарату або будівлі із нестандартним архітектурним рішенням, та оболонкові елементи різних поперечних перерізів, які мають високу міцність при порівняно невеликій масі. В залежності від призначення та дизайну такі пластинчасті та оболонкові елементи можуть мати товстостінність або змінну товщину, різні способи закріплення або з'єднання, технологічні отвори, складні контури поперечного перерізу та інші конструктивні неоднорідності. Прикладами таких конструкцій є різні деталі та корпуси літальних, космічних, підводних та наземних апаратів, елементи житлових та комерційних будівель, зерносховищ та нафтосховищ, стадіонів та портів, мостів та тунелів, об'єктів хімічної промисловості, електроніки, інженерії, робототехніки та інших галузей виробництва із застосуванням передових технологій. При проектуванні та експлуатації таких конструкцій необхідно враховувати дію різноманітних динамічних навантажень, оптимально підбирати форму, геометричні розміри, матеріал елементів конструкцій та варіанти їх поєднання з метою забезпечення міцності, стійкості, легкості та економічності. Необхідно мати надійні чисельні та експериментальні методи досліджень динамічних характеристик, які з високою точністю дають можливість визначити частоти і форми вільних коливань пластин та оболонок з конструктивними неоднорідностями з різних матеріалів при різних граничних умовах.

Аналіз наукової літератури з даної тематики показав, що для досліджень коливань пластин і оболонок простої геометрії існує багато аналітичних та теоретичних методів. У випадку визначення частот і форм вільних коливань пластин і оболонок різної конструктивної неоднорідності або товстостінності багато аналітичних і теоретичних методів втрачають актуальність, оскільки дослідження пов'язані із значними труднощами реалізації математичної моделі та необхідністю розв'язання складної

системи диференціальних рівнянь в частинних похідних із змінними коефіцієнтами, при розв'язанні якої спостерігається нестійкість розрахунку та втрата необхідного порядку даних обчислень.

Дослідження складних об'єктів можливо здійснювати за допомогою чисельних методів, серед яких особливої популярності набув метод скінченних елементів (МСЕ). Проте результати кожного нового класу задач, розв'язаного МСЕ, необхідно підтверджувати експериментально, оскільки можна допуститись помилок при моделюванні об'єкта на ЕОМ. Серед експериментальних методів добре себе зарекомендували резонансні методи та метод голографічної інтерферометрії, які дають можливість в реальному часі на реальному об'єкті спостерігати форми коливань, реєструвати момент виникнення резонансу та фіксувати частоту коливань.

Визначення частот і форм вільних коливань пластин і оболонок з різною конструктивною неоднорідністю на основі розвинених та удосконалених чисельних та експериментальних підходів є актуальною проблемою прикладної математики.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Дослідження проведено і включено у наукові звіти науково-дослідних робіт: НДР № 1.3.1.401 «Чисельний аналіз впливу конструктивної та структурної неоднорідності анізотропних оболонкових структур на їх стаціонарне деформування», номер державної реєстрації 0115U005709, 2016-2020 рр.; НДР №1.3.1.410 «Динамічне деформування елементів конструкцій сучасного машинобудування та стійкість і досяжність множин траєкторії механічних систем», номер державної реєстрації 0117U000700, 2017-2021 рр.; НДР №1.3.1.433 «Аналіз напружено-деформованого стану, коливань та стійкості спряжених оболонок обертання, некругових циліндричних оболонок з різним поперечним перерізом та багатокутних пластин на основі чисельних та експериментальних підходів», номер державної реєстрації 0120U105681, 2021-2025 рр.; НДР №1.3.1.452-23 «Розрахунок параметрів напружено-деформованого

стану конструктивних елементів ракетно-космічної техніки у вигляді циліндричних оболонок складної геометрії та неоднорідної структури за статичним і динамічним навантаженням. Розділ 1. Аналіз впливу складної геометрії та неоднорідної структури циліндричних оболонок, як конструктивних елементів ракетно-космічної техніки, на розподіл полів напружень і переміщень при різному характері деформування», номер державної реєстрації 0123U100910, 2023-2024 рр; НДР ІМех-2025/1 «Вивчення структури та фізико-механічних характеристик матеріалів, що застосовуються у зразках крилатих, балістичних, гіперзвукових аеробалістичних, надзвукових протикорабельних ракет та авіаційних ракет повітря-повітря, безпілотних авіаційних комплексів, що застосовуються РФ у війні проти України», номер державної реєстрації 0125U000036д, 2025-2026 рр.; НДР №1.3.1.468-25 «Напружено-деформований стан пластин і оболонок складної форми як елементів конструкцій спеціального призначення та ракетної техніки з неоднорідною структурою», номер державної реєстрації 0125U000957, 2025-2026 рр.

Мета дослідження полягає в аналізі вільних коливань пружних багатокутних пластин та циліндричних оболонок різного поперечного перерізу з конструктивною неоднорідністю на основі розвинених чисельних та експериментальних підходів і встановленні залежностей частот та форм вільних коливань пластин та оболонок від зміни різних конструктивних параметрів.

Для досягнення поставленої мети було виконано такі **завдання**:

- розрахунок методом скінченних елементів частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та встановлення залежності частоти вільних коливань пластин від товщини, наявності круглого отвору та величини його радіуса, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов;
- розрахунок методом скінченних елементів частот і форм вільних коливань циліндричних оболонок різного поперечного перерізу, аналіз впливу на спектр частот і форм вільних коливань оболонок її товщини та характеру зміни товщини, кута розкриття та способу розкриття обolonки, геометрії поперечного перерізу, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов;

- розробка комбінованого підходу визначення частот вільних коливань ізотропних багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами;
- розрахунок числових коефіцієнтів та розрахунок формулою частот вільних коливань багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами, узагальнення використання формули;
- розвинення експериментального підходу для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин з отвором та без з різними граничними умовами на основі резонансного методу;
- розвинення експериментального підходу для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та циліндричних оболонок з різними граничними умовами на основі методу стробогологафічної інтерферометрії;
- проведення експериментальних досліджень та порівняння отриманих частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та товстостінних циліндричних оболонок за допомогою двох запропонованих експериментальних підходів з частотами і формами вільних коливань розрахованими чисельно;
- проведення дослідження достовірності, точності та збіжності результатів, отриманих на основі чисельного та експериментальних підходів для розрахунків частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та циліндричних оболонок з різними конструктивними неоднорідностями.

Об'єктом дослідження є динамічна поведінка багатокутних пластин та циліндричних оболонок різної конструктивної неоднорідності.

Предметом дослідження є спектр частот та форм вільних коливань пружних багатокутних пластин та циліндричних оболонок різного поперечного перерізу в залежності від характеру зміни різних конструктивних параметрів.

Методи дослідження. Чисельні розрахунки частот і форм вільних коливань пластин та циліндричних оболонок проводились методом скінченних елементів, який реалізовано в програмному середовищі FEMAP (ліцензія №60046828). Визначення частот вільних коливань багатокутних пластин

проводились за допомогою модифікованої формули для визначення частот вільних коливань ізотропної прямокутної пластини. Експериментальні дослідження частот і форм вільних коливань пластин та циліндричних оболонок проводились методом стробоголографічної інтерферометрії. Експериментальні дослідження частот і форм вільних коливань пластин проводились резонансним методом.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

- розвинено чисельний підхід на основі методу скінченних елементів для розрахунку частот та форм вільних коливань ізотропних багатокутних пластин з отвором і без та замкнутих і незамкнутих циліндричних оболонок різного поперечного перерізу, різної товщини, з різними варіантами граничних умов;
- розроблено комбінований підхід для розрахунку частот вільних коливань ізотропних багатокутних пластин різної товщини на основі модифікованої формули для розрахунку частот вільних коливань ізотропної прямокутної пластини та розраховані методом скінченних елементів коефіцієнти для кожної багатокутної пластини з різними граничними умовами, які залежать від співвідношення товщини до сторони пластини;
- розвинено експериментальний підхід на основі резонансного методу та створено віброкомплекс для демонстрації коливань в реальному часі та визначення з достатнім ступенем достовірності частот і форм вільних коливань багатокутних пластин;
- розвинено експериментальний підхід на основі стробоголографічної інтерферометрії та створено стробокомплекс для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та товстостінних циліндричних оболонок, який в реальному часі демонструє коливання поверхні пружного тіла у вигляді інтерференційних картин, дає можливість змінювати режим вібробудження та амплітуду коливань, з високим ступенем достовірності досліджувати спектр частот і форм вільних коливань;
- проведено аналіз вільних коливань широкого класу пластин і оболонок з різною конструктивною неоднорідністю та отримано нові результати у

- вигляді числових значень частот та ілюстрацій форм вільних коливань, проведено порівняння результатів отриманих за допомогою різних підходів;
- на основі результатів отриманих чисельним та експериментальними підходами проведено аналіз особливостей динамічних характеристик широкого класу пластин і оболонок, виявлені закономірності впливу геометричних параметрів, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов на спектр частот і форм вільних коливань кожного з розглянутих пружних тіл.

Обґрунтованість та достовірність результатів наведених у дисертації забезпечується застосуванням обґрунтованих чисельних методів і критерію практичної збіжності отриманих результатів; коректністю проведення експериментів та вимірювань; фізично правдоподібною інтерпретацією отриманих результатів; порівняльним аналізом точності та узгодженням результатів отриманих різними методами; чисельними розв'язками тестових задач.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані результати та розвинені підходи можуть бути використанні при розв'язанні широкого класу практичних задач визначення динамічних характеристик вільних коливань пластинчастих та оболонкових елементів з різною конструктивною неоднорідністю; розвинений чисельний підхід дає можливість отримувати достовірну інформацію про спектр частот і форм вільних коливань елементів конструкції в умовах максимально наближених до реальних умов експлуатації без значних затрат коштів та часу, змінюючи різні параметри, обирати оптимальні геометричні розміри, економічно вигідні матеріали та способи закріплення для забезпечення міцності, стійкості та надійності конструкції; розроблений комбінований підхід дає можливість швидко визначити частоти і форми вільних коливань багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами; розвинені експериментальні підходи дають можливість в реальному часі демонструвати вільні коливання пружних тіл, а одержані результати застосовувати для оцінки результатів, отриманих різними теоретичними методами.

Результати отримані комбінованим підходом були передані для впровадження в розрахункову практику «Конструкторському бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля».

Результати дисертаційного дослідження використано в рамках виконання цільової програми з оборонної тематики за напрямом прикладні дослідження і розробки згідно з договорами ІМех-2024/2 та ІМех-2025/1.

Особистий внесок здобувача. Основні результати отримані здобувачем самостійно. У всіх працях, опублікованих у співавторстві, здобувач брав участь у постановці задач, розвиненні підходів до їх розв’язання та реалізації розрахунків та експериментів, обговоренні отриманих результатів досліджень. Здобувачеві повністю належить поширення чисельного підходу на основі методу скінченних елементів для розрахунку частот і форм вільних коливань багатокутних пластин [1, 4, 8, 10-14, 16, 19, 21, 22, 23, 26, 30-32, 35, 38, 39] з отвором і без, різної товщини, з різною комбінацією граничних умов та замкнутих і незамкнутих циліндричних оболонок [2, 3, 5-7, 9, 15, 17, 18, 20, 24, 25, 27-29, 33, 36, 37] різного поперечного перерізу, з різним характером зміни товщини, з довільними граничними умовами; розробка комбінованого підходу для визначення частот вільних коливань ізотропних багатокутних пластин [4, 10, 13, 16, 21, 34] різної товщини та розрахунок коефіцієнтів для кожної багатокутної пластини; розвинення експериментального підходу на основі резонансного методу та створення віброкомплексу для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин [8, 14, 19, 34], розвинення експериментального підходу на основі методу стробоголографічної інтерферометрії та створення віброкомплексу для визначення частот і форм вільних коливань пластин та оболонок. Співавтори академік НАН України О.Я. Григоренко, к.ф.-м.н. О.В. Бойчук брали участь у постановках задач та аналізі отриманих результатів; академік НАПН України В.Д. Будак, професор W.H. Muller та інші співавтори брали участь в деяких розрахунках та аналізі одержаних результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях, зокрема: Всеукраїнська науково-практична

конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Інформаційні технології в моделюванні. ІТМ – 2016» (Миколаїв, 2016); Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки» (Дніпропетровськ/Дніпро, Дніпродзержинськ/Кам'янське, 2016, 2019, 2021); Міжнародна науково-практична конференція «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних та фізико-математичних наук» (Миколаїв, 2016, 2018); Всеукраїнська науково-практична конференція «Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделюванні об'єктів, явищ і процесів» (Миколаїв, 2016); IV, VI Міжнародні наукові конференції «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2017, 2021); Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2018, 2023); II Міжнародна науково-технічна конференція «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 2020); XXVI Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук» (Львів, 2021); Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022» (Львів, 2022); Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2024); Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність і перспективи – 2024» (Київ, 2024); Міжнародна науково-технічна конференція «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення» (Дніпро, 2025).

У повному обсязі дисертація доповідалась та обговорювалась на науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.ф.-м.н., професор О.Я. Григоренко, 2025 р.), на науковому семінарі за напрямом «Механіка оболонкових систем» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.т.н., професор П.З. Луговий, 2025 р.), на загальноінститутському семінарі з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор В.М. Назаренко, 2025 р.), на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету (керівник – д.ф.-м.н., професор І.А. Лоза, 2025 р.), на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (керівник – чл.-кор. НАН

України, д.ф.-м.н., професор Я.О. Жук, 2025 р.).

Публікації. Основні результати дисертації висвітлені в 39 наукових працях, з них 18 [1, 5-21] статей у наукових виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України і статті у наукових періодичних виданнях інших держав із наукового напрямку, з якого підготовлено дисертацію; три [2-4] публікації, які є розділами у різних колективних монографіях видавництва Springer; одна стаття [22] у науковому журналі який не включений до Переліку наукових фахових видань України; 17 публікацій [23-39] в матеріалах вітчизняних та міжнародних наукових конференцій. Дванадцять праць [1-4, 7, 11, 13-15, 17, 18, 21] опубліковано у різних періодичних виданнях, включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України та у закордонних виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та Scopus. Статі [7, 11, 13, 14, 15, 17, 18] опубліковані у виданнях віднесених до третього квартиля (Q3), статті [2-4] опубліковані у виданнях віднесених до четвертого квартиля (Q4) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел з 303 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 341 сторінку, разом із 244 рисунками та 172 таблицями.

Автор висловлює щирю вдячність своєму науковому консультантові академіку НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Олександру Ярославовичу Григоренку за постійну увагу та всебічну підтримку під час виконання роботи.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Пластини та оболонки різної форми є поширеними елементами тонкостінних конструкцій інженерних споруд та сучасних будівель, кораблів, космічних апаратів, виробів авто- та авіо-промисловості, та інших галузей виробництва із застосуванням передових технологій. З розвитком науки і техніки з'являються нові конструкції у вигляді багатокутних пластин або циліндричних оболонок складної форми, змінної товщини, з технологічними отворами та іншими конструктивними неоднорідностями. При проектуванні конструкцій необхідно враховувати дію різноманітних динамічних навантажень, оптимально підбирати форму, розміри, матеріал елементів конструкцій та варіанти їх поєднання з метою забезпечення міцності, стійкості, легкості та економічності конструкції. Для цього треба мати аналітичні, чисельні та експериментальні методи досліджень, зокрема частот і форм вільних коливань пластин та оболонок ускладненої форми чи з конструктивними неоднорідностями з різних матеріалах при різних граничних умовах.

Початком вивчення коливань пластин можна вважати початок XIX століття, а саме демонстрацію рисунків Хладні [1, 2], які представляють собою рисунки, утворені в результаті накопичення дрібних частинок у вузлових лініях стоячих хвиль на поверхні пружної пластини, що коливається на власній частоті. Перед фізиками та математиками постала складна задача розробки математичної теорії коливань пластин і теоретичного опису фігур Хладні. Коливання квадратної пластини та рисунки Хладні стали об'єктом багатьох досліджень [3-6]. Довгий час ця задача була неприступною. Лорд Релей у своїй публікації [7] для визначення першої власної частоти згинних коливань квадратної пластини з вільними краями, при нульовому коефіцієнті Пуассона, запропонував на

вибраній формі коливань прирівняти максимальні амплітудні значення. Через деякий час у книзі [8] автором було представлено багато обчислень основних частот вільних коливань струни, стержня, балки, мембрани, пластини методом який дістав назву «метод Релея». В свою чергу В. Рітцом у науковій статті [9] було описано теоретичне обґрунтування та наведено багато числових результатів визначення частот і форм вільних коливань квадратних пластин з вільними краями та проведено порівняння з експериментами Хладні. У відповідь на це Релей написав статтю [10], в якій вітав Рітца з його роботою, але зазначив, що він сам використовував метод Рітца в багатьох публікаціях. Згодом з'явилася значна кількість статей, у яких цей метод застосовувався для дослідження коливань різних об'єктів. В окремих публікаціях він отримав назву «метод Рітца», а в інших – «метод Релея–Рітца».

Дослідження вільних коливань циліндричних оболонок відносяться до початку XX століття, історичний огляд багатьох цих досліджень представлено у роботах [11] та [12].

Однією з основних робіт, присвячених коливанню складних механічних систем, є робота С.П. Тимошенка [13], у якій розглянуто загальну теорію вільних та вимушених коливань, представлено застосування наближеного методу Релея для дослідження коливань більш складних об'єктів. Розглянуто задачі про повздовжні, крутильні та поперечні коливання призматичних стержнів, коливання стержнів змінного поперечного перерізу, коливання мостів, лопаток турбін, викладена теорія коливань кругових кілець, мембран, пластин та дисків турбін. Представлено опис вібровимірювальної апаратури, яка застосовується при експериментальних дослідженнях коливань.

Наприкінці XX століття задачі динаміки пластин і оболонок набувають значної актуальності, що призводить до стрімкого розвитку математичного апарату і теорії пружності. У [14] розглянуто нові актуальні задачі та акцентовано увагу на дослідженні власних коливань пластин і

оболонок, що стало підґрунтям для виокремлення цього напрямку в окремий розділ динаміки.

Розвитку теорії коливань пружних систем присвячені роботи [15, 16], зокрема, вільні коливання пластин і оболонок досліджувались у [17, 18]. Некласичні теорії коливань представлений в оглядовій роботі [11]. У даній публікації проаналізовані різні дослідження коливань пластин і оболонок, проведено порівняння отриманих результатів з результатами отриманими різними динамічними теоріями.

У рамках класичної теорії пластин для визначення частот і форм вільних коливань застосовується широкий спектр методів: метод Релея–Рітца [19], метод Бубнова–Гальоркіна [20], метод сплайн-колокації [21, 22], метод сплайн-апроксимації [23, 24], метод суперпозиції [25, 26], метод рядів [27], метод сіток [28], метод функцій Гріна [29, 30], асимптотичний метод Болотіна [31] та інші.

Багато досліджень присвячено вивченню коливальних процесів тонких квадратних та круглих пластин, а також тонких кругових циліндричних оболонок, які є найпростішими конструктивними елементами для математичного моделювання. Теоретичні та розрахункові моделі будувалися, здебільшого, для ізотропних матеріалів, а також для граничних умов, які легко описуються математичними залежностями.

У [32] розраховані частоти вільних коливань квадратної пластини з вільними краями, а також досліджена точність забезпечення однорідних граничних умов. Використовуючи метод суперпозиції задачу зведено до однорідної квазірегулярної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку розв'язано за допомогою достатньої умови існування обмеженого розв'язку. Аналіз асимптотичної поведінки невідомих дав можливість побудувати нетривіальні розв'язки системи, які в свою чергу дають змогу отримати аналітичні представлення форм вільних коливань пластини. Проведено порівняння теоретичних даних з експериментальними.

У [33] запропоновано експериментально-теоретичну методику

визначення пружних сталих квадратних п'єзокерамічних пластин на основі аналізу спектрів їхніх планарних коливань із виокремленням характерних резонансних частот.

У [34] за допомогою вдосконалення граничних умов запропоновано варіант рівнянь теорії пружних пластин та розв'язано задачу про нелінійні коливання пластини. У [35] проаналізовано вплив нелінійності граничних умов на вільні нелінійні коливання прямокутних пластин. Нелінійні граничні умови для мембранних сил перетворюються на лінійні граничні умови за допомогою функції напружень. Враховуються допоміжні граничні умови, що описують відсутність площинних переміщень в затиснутій частині.

У [36] за допомогою принципу Гамільтона досліджуються вимушені коливання круглої пластинки опертої в шести точках контуру, побудовані резонансна крива та епюри напружень. У [37] розглянуто власні коливання тонких кругових і кільцевих пластин із використанням підходу Гамільтона. Аналітичні частотні рівняння отримано для різних типів граничних умов. Для кругових пластин проаналізовано три основні випадки граничних умов, а для кільцевих – дев'ять. Отримані результати добре узгоджуються з даними, наведеними в попередніх дослідженнях.

До робіт, присвячених огляду досліджень динаміки тонких оболонок, можна віднести роботи таких вчених, як: А. Leissa [38], А.Е.Н. Love [39], S. Markusa [40]. Огляд різних методів дослідження коливань оболонок наведено у роботі [41], представлено основні напрямки досліджень: розвиток різних теорій оболонок, дослідження оболонок різної геометрії, методи дослідження поставлених задач динаміки. Наголошується на тому, що найбільше досліджень направлено на вивчення динаміки циліндричних оболонок.

Вивченню динаміки тонких кругових оболонок з різними граничними умовами приділено багато уваги різними дослідниками та опубліковано багато наукових праць. Вільні коливання циліндричних оболонок з

круговим поперечним перерізом розглянуті у [42, 43]. Фундаментальною монографією, присвяченою дослідженню динаміки оболонкових конструкцій, вважається робота [44], в якій, використовуючи просторову теорію пружності в класичній та уточненій постановках наведені рівняння вільних коливань оболонок. У [45] представлено огляд теорій деформації зсуву пластин та оболонок. Існують розрахункові моделі, за яких циліндрична оболонка поводить себе як балка [46], також встановлено щільність розподілення перших частот для циліндричних оболонок [47].

У роботі [48] досліджуються вільні коливання тонкої еластичної ортотропної циліндричної панелі з вільними краями. Використовуються рівняння класичної теорії ортотропних циліндричних оболонок, а для обчислення власних частот та визначення відповідних форм коливань застосовується узагальнений метод Канторовича–Власова. У [49] розглянуто згинні коливання тонких циліндричних оболонок, наведено багато форм коливань. Представлені теоретично отримані вирази для визначення власних частот циліндричних оболонок із вільно закріпленими краями та проведено порівняння з частотами, отриманими експериментально. У [50] представлені розраховані на основі виразів енергії циліндричних оболонок таблиці для швидкого визначення частот і форми коливань нескінченно довгих тонких циліндричних оболонок.

У [51] на основі трьох диференціальних рівнянь досліджуються вільні коливання тонких циліндричних оболонок, що мають скінченну довжину. Рівняння легко розв'язуються після введення деяких припущень. В результаті Отримані частотні рівняння для циліндричних оболонок з різними граничними умовами: з вільно обпертими обома краями; з жорстко закріпленими обома краями; з одним вільно обпертим краєм та другим жорстко закріпленим. Встановлено, що найнижча частота є найменшою в першому випадку, більшою в третьому і найбільшою в другому. Дві інші частоти, отримані з частотного рівняння, приблизно однакові в усіх випадках. В результаті апроксимації виявлено, що характеристичні рівняння

для трьох випадків подібні до частотних рівнянь для поперечних коливань балок із подібними граничними умовами.

У роботі [52] розглядаються як лінійні так і нелінійні коливання циліндричних оболонок з круговим поперечним перерізом з різними граничними умовами на основі теорії Сандерса – Койтера. На основі гармонічних функцій і поліномів Чебишова розкладено переміщення в подвійний ряд. Проведено аналіз результатів та порівняння з результатами отриманими при розрахунках методом скінченних елементів та експериментальними даними.

Визначення частот вільних коливань пластин складної геометричної форми пов'язане з проблемами обчислювального характеру та необхідністю переходу до неортогональної системи координат, у зв'язку з цим є необхідним адаптувати розглянуті вище методи до конкретної задачі, або розробляти інші підходи. Наприклад, методом Рітца [9] можна отримати наближені рішення для частот і форм вільних коливань тонких пружних трикутних [53, 54], прямокутних [55, 56] і багатокутних [57] пластин. Таким чином у роботі [57] за допомогою покращеного методу Рітца на класі гомотопічних форм досліджено коливання повністю вільних багатокутних і заокруглених багатокутних пластин. Наведено перші частоти вільних коливань досліджуваних пластин та представлена еволюцію форм коливань. У [58] методом Рітца отриманні рівняння власних значень для вільних коливань тонких пластин, які включають криволінійні краї, визначені поліноміальними виразами. Обраний клас пластин може бути розділений на чотири секторні елементи під кутом 90° , що дозволяє мати до чотирьох секцій зовнішньої межі та до чотирьох секцій внутрішньої межі, кожна з яких описується поліномами. При відсутності симетрії або якщо вона не використовується, елементи з'єднуються за допомогою жорстких поступальних і обертальних пружин, які забезпечують необхідні умови безперервності. Включено ряд ефектів: внутрішні точкові або лінійні опори; зосереджені маси; ступінчата зміна товщини. Параметри власної частоти

наведено для кількох пластин, проведено порівняння результатів з результатами інших авторів та встановлено точність підходу. Отримані результати для кількох пластин різної складності, які раніше не розглядались у літературі. У статті [54] застосовано метод Рітца, в якому функції зміщення взято у вигляді алгебричних многочленів для визначення частоти вільних коливань трикутних пластин.

У [59] досліджено вільні коливання консольних та повністю вільних рівнобедрених трикутних пластин на основі точної тривимірної теорії пружності. Спочатку фактична область пластини відображається на базову кубічну область. Потім застосовується метод Рітца для виведення рівняння власної частоти з енергії деформації та кінетичної енергії пластини. У [60] за допомогою методу Релея–Рітца досліджено вільні коливання ізотропних та симетрично шаруватих композитних пластин загальної трикутної форми. У [61] запропоновано наближений метод аналізу вільних коливань прямокутних трикутних пластин з довільною змінною товщиною та різними граничними умовами, прямокутна трикутна пластина розглядається як різновид прямокутної пластини з неоднорідною товщиною. У [53] запропоновано метод для розрахунку частот і форм вільних коливань ізотропних та ортотропних трикутних пластин із різними граничними умовами.

При дослідженні вільних коливань товстостінних пластин багато методів стають незастосовними. У [62] зроблено огляд публікацій присвячених дослідженням коливань товстих трикутних, прямокутних, кругових, кільцевих та секторних пластин, основна увага приділяється дослідженням, заснованим на теорії Міндліна та модифікованих теоріях пластин Міндліна [63]. Так у [64] функція енергії, отримана за допомогою теорії пластин Міндліна, мінімізується за допомогою процедури Релея–Рітца, яка призводить до основних рівнянь власних значень. У [65] на основі теорії деформації зсуву Міндліна проаналізовано вільні коливання товстих консольних пластин довільної трикутної форми. Також для аналізу вільних коливань товстих квадратних та прямокутних пластин використовують

тригонометричну [66] та експоненціальну [67] теорії деформації зсуву, які побудовані на класичній теорії пластин.

У [68] з використанням функціоналу енергії отримано матричне рівняння, розв'язавши яке отримано частоти та форм вільних коливань прямокутної пластини у площині, яка визначається чотирма криволінійними границями з використанням восьми точок та координат для відображення геометрії.

У [69] система з трьох рівнянь зведена до одного рівняння з прогином при вигині, що діє як потенційна функція. Застосовано метод розділення змінних і отримано аналітичний розв'язок диференціального рівняння в замкнутому вигляді.

У [70] для визначення частоти вільних коливань в'язкопружної паралелограмної пластини, товщина якої змінюється параболічно, запропоновано використовувати метод Релея–Рітца. Припускається, що пластина затиснута по чотирьох краях, а її товщина змінюється параболічно вздовж довжини пластини. У [71] запропоновано метод визначення частот і форм вільних коливань шестикутних пластин з вільними та жорстко закріпленими краями, представлені перші форми коливань.

Осесиметричні резонансні коливання пружної круглої сендвіч-пластини при локальних періодичних поверхневих навантаженнях прямокутної, синусоїдальної та параболічної форм досліджено у [72]. У [73] досліджено осесиметричні вимушені коливання круглої сендвіч-плити на пружній основі. У обох роботах для опису кінематики плити використовується гіпотеза порушеної нормалі, отримано аналітичне рішення задачі та проаналізовано результати.

Велику цікавість та складність при розрахунках викликають пластини з різними конструктивними отворами, так у [74] запропоновано наближений метод аналізу вільних коливань прямокутних пластин з отвором різної форми, ідея якого полягає в представленні розглянутої пластини, як пластини неоднорідної товщини, тобто отвір розглядається як дуже тонка

частина пластини. У [75] методом найменших квадратів досліджено вільні коливання прямокутної пластини з круглим отвором у центрі. У [76] представлено результати дослідження вільних коливань симетричних багатошарових композитних пластин з центральним отвором, які отримано за допомогою методу скінченних елементів та експериментального методу.

У [77] представлено чисельний метод дослідження коливань ізотропних та ортотропних прямокутних пластин з отворами та неоднорідностями. Запропоновано розділити область задачі на відповідні прямокутні сегменти, що дає змогу легко знайти функцію відхилення для початково комплексної області. Метод простий та універсальний завдяки використанню розробленої характеристичної поліноміальної функції в процедурах Релея–Рітца. Отримані результати мають малу розбіжність в порівнянні з результатами отриманими іншими авторами.

У [78] розширено метод прогнозування форм для аналізу власних коливань пластин з отворами. Теорія Міндліна прийнята для моделювання пластин, наявність отворів враховується шляхом віднімання потенціальної та кінетичної енергій від відповідних енергій пластини. Отримані результати порівнюються з розрахунками методом скінченних елементів.

У роботі [79] отримано власні частоти кільцеподібних багатокутних пластин, кільцеподібних еліптичних пластин, прямокутних пластин з еліптичним отвором та круглих пластин з еліптичним отвором методом, який розроблений автором у [80]. Для перевірки результатів деяких розглянутих випадків були проведені експериментальні дослідження.

З огляду літератури, що наведений вище, можна побачити, що в світовій науковій літературі широко вивчена динаміка циліндричних оболонок з круговим поперечним перерізом, на ряду з цим задача динаміки циліндричних оболонок з некруговим поперечним перерізом приділено недостатньо уваги. Ще менше вивчені коливання оболонок вказаного класу змінної товщини. В багатьох роботах відмічено про складність вивчення коливань таких оболонок, яка пов'язана з труднощами реалізації

математичного апарату в результаті змінної геометрії поперечного перерізу оболонки. Задачі динаміки циліндричних оболонок змінної кривизни розв'язуються різними аналітичними та чисельними методами [81-85].

Задачі динаміки циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом викликають особливий інтерес серед науковців. У [86] представлено метод розв'язання задач лінійної динаміки з використанням асимптотичного методу. Асимптотичні методи ефективно використовують протягом багатьох десятиліть, наприклад, для дослідження динаміки поперечно ізотропного порожнистого циліндра [87] або циліндричних оболонок з овальним поперечним перерізом [88]. У [89] для розв'язування аналогічної задачі використовується варіаційний метод. Представлено процедуру розв'язування та наведено чисельні результати для вільних коливань овальних циліндрів з вільною опорою без початкового напруження. Проведено порівняння отриманих результатів для оболонок з різним поперечним перерізом.

У роботі [90] запропоновано наближений метод матриці переносу для дослідження вимушених коливань циліндричних панелей змінної кривизни. Точне рішення для матриці переносу панелі з експоненціальною кривизною отримують шляхом точного розв'язування диференціальних рівнянь руху оболонки зі змінним коефіцієнтом методом перетворень Лапласа – різницевих рівнянь. У [91] для дослідження вільних коливань циліндричної оболонки з некруговим поперечним перерізом і змінною товщиною використано метод матриці переносу разом із моделлю теорії оболонок Флюгге. У свою чергу, у [92] цим самим підходом проаналізовано коливання овальної циліндричної оболонки зі змінною товщиною.

Циліндричні оболонки різних поперечних перерізів в промисловості широко використовуються як резервуари заповненні рідиною, тому розробка різних методів дослідження вільних коливань таких оболонок з урахуванням впливу заповненої рідини є актуальною задачею [93-96].

У [97] методом сплайн-колокації досліджуються вільні коливання

тонких циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом сталої товщини з ізотропних матеріалів. Встановлено зменшення частоти вільних коливань зі збільшенням ексцентриситету еліпсу поперечного перерізу оболонки. У [98, 99] проведено дослідження складної задачі динаміки товстостінних ортотропних неоднорідних циліндрів.

У [100] досліджуються плоскі хвилі типу Релея в замкнутій напівнескінченній циліндричній оболонці з некруговим поперечним перерізом, які затухають від вільного торця вздовж твірної.

У статті [101] запропоновано підхід до визначення частот і форм вільних коливань з'єднаних систем з оболонок обертання різної геометрії і відносної товщини, підхід включає побудову математичної моделі коливань на основі класичної теорії Кірхгофа–Лява, уточненої теорії типу Тимошенка, просторової теорії пружності і чисельно-аналітичну методику розв'язання відповідних двовимірних (тривимірних) задач на основі зниження їх розмірності та використання методів послідовних наближень і покрокового пошуку в поєднанні з методом ортогональної прогонки. У [102] з урахуванням поперечних деформацій досліджується спектр частот вільних коливань неоднорідних оболонок обертання.

У роботах [103, 104] на основі методу сплайн-коллокації досліджено резонансні частоти некругових циліндричних оболонок з гофрованим поперечним перерізом.

У [105] досліджено характеристики вільних коливань еліптичної циліндричної оболонки зі скінченними кільцевими елементами жорсткості. Рівняння коливань оболонки виведені на основі теорії оболонок Флюгге, а вплив кільцевих ребер жорсткості оцінюється за допомогою теорії «розмитих» ребер жорсткості, за якою властивості ребер жорсткості усереднюються по поверхні оболонки.

Визначення частот вільних коливань пластин і оболонок складної геометрії з різними конструктивними неоднорідностями є досить складною задачею і не підлягає точному розв'язанню, тому необхідно застосовувати

різні чисельні методів, наприклад, метод скінченних елементів (МСЕ) або метод скінчених різниць (МСР). Можливості використання чисельних методів для розв’язання задач динаміки пластин і оболонок розглянуто у роботах [106-109].

Методи чисельного інтегрування активно застосовуються при розв’язанні задач теорії оболонок обертання [110-119]. У [120] запропоновано підхід до чисельного інтегрування рівнянь у рамках теорії оболонок, побудований на гіпотезах С.П. Тимошенка, для аналізу динаміки оболонок. У рамках моделей оболонок типу Тимошенка та Кірхгофа–Лява наведено постановку лінійних та фізично нелінійних задач статички для довгих циліндричних оболонок [121].

За допомогою методу дискретної ортогоналізації можна здійснювати стійку обчислювальну процедуру за рахунок ортонормування векторів-розв’язків задач Коші із скінченною кількістю точок інтервалу зміни аргументу. У роботах Я.М. Григоренко [111, 122, 123] вдосконалено та представлено в універсальному вигляді метод дискретної ортогоналізації. Даний метод застосовується до широкого класу задач будівельної механіки. У [124-128] О.Я. Григоренко методом сплайн-колокації розглядає задачі динаміки різних оболонок.

Методи скінченних елементів, а також метод скінченних різниць оснований на використанні принципу дискретизації реальної конструкції. Вони дозволяють розв’язувати великий клас задач, точність результатів яких залежить від розміру і типу елемента, якими проводиться розбиття об’єкта, та вибору апроксимуючих функцій. При застосуванні цих методів для обчислення частот вільних коливань необхідно розв’язати систему алгебраїчних рівнянь високих порядків, а це в свою чергу стає складною задачею, яку важко розв’язати без використання електронно обчислювальних машин.

Для розрахунку власних частот пластин та оболонок застосовуються різноманітні модифікації методу скінченних різниць, зокрема: компактні схеми на основі POD-CDS – це схема компактних різницевих ортогональних розкладів

[129]; компактні схеми для нерівномірних сіток [130]; схеми на гексагональній сітці [131]; а також схеми IV-FD, наприклад, для пластини зі ступінчастою товщиною [132] або для шаруватої композитної пластини [133].

Існують й інші варіанти консервативних різницевих схем, наприклад, метод множників дозволяє будувати схеми, що точно зберігають дискретні закони збереження незалежно від варіаційної структури системи [134]; інший підхід використовує комбінацію Рунге – Кутти для збереження інтегралів руху [135]; схеми SBP забезпечують стабільне поведіння та консервативність при складних граничних умовах [136]; у динаміці пластин основна увага приділяється числовій стійкості числових методів для системи фон Кармана завдяки використанню енергозберігаючих методів [137] та інші [138-141].

При пружно-пластичній постановці та геометричній нелінійності розв'язано клас задач динаміки оболонок загального вигляду [142], зокрема: комплексна модель тонких неоднорідних оболонок зі змінною товщиною враховує тепломеханічні й геометричні нелінійності [143]; нелінійний динамічний аналіз оболонок із жорстким покриттям з урахуванням нелінійності матеріалу [144] та інші [145-147].

У статті [148] представлено розробку моделі динаміки пружних однорідних оболонок помірної товщини. Модель отримана шляхом адаптації та модифікації моделі напруженого стану однорідних оболонок, розробленої у [149] для статичних задач. У динамічній версії SAM-H переміщення та напруження апроксимуються поліномами координати, яка не належить площині. Наближення напружень збігається зі статичною версією SAM-H, якщо нехтувати динамічними ефектами.

Застосування МСЕ для аналізу коливань пластин і оболонок потребує потужних ЕОМ, оскільки метод зводиться до розрахунку великих матриць. Найчастіше розмір матриці зменшують за рахунок нехтування деяких переміщень, шляхом мінімізації енергії деформації. Цей підхід вимагає правильного вибору необхідних переміщень і передбачає додаткові наближення та втрату точності.

Основні принципи застосування МСЕ до задач динаміки пластинчатих і оболонкових конструкцій представлені у [150-156], сам метод поширено у багатьох працях [157-162].

У роботі [163] розраховані МСЕ власні частоти ізотропної тонкої пластини, проведено порівнювали з частотами, отриманими з точного рішення типу Лява. Результати показали, що зміна товщини пластини не впливає на частотний параметр.

У [164] розроблено МСЕ з використанням теорії зсувної деформації вищого порядку та принципу Гамільтона для дослідження вільних коливань товстих квадратних композитних пластин із центральним прямокутним вирізом, з наявністю розшарування навколо вирізу та без нього.

У статті [165] представлено аналіз коливань підсилених пластин із використанням як традиційних методів, так і МСЕ. Для побудови пластини та ребер жорсткості використовуються теорія пластин Міндліна та балки Тимошенка. На багатьох прикладах запропоновано дослідження точності та збіжності суперелементів. Досліджується вплив на характеристики вільних коливань підсилених панелей різних параметрів, таких як: граничні умови плити; орієнтація, розміри та кількість ребер жорсткості.

Ієрархічний МСЕ застосовується у публікації [166] для розрахунку частот і форм вільних коливань прямокутної пластини. Розглядаються десять різних граничних умов, включаючи вільні краї та точкові опори. Для кожного випадку наведено численні результати, які мають хорошу збіжність з результатами інших дослідників.

У [167] представлено розрахунки МСЕ частот вільних коливань плоских пластин довільної форми, пластина розглядається як сукупність елементів. Матриці жорсткості та матриці інерції отримані для прямокутного ізотропного пластинчастого елемента однакової товщини, які використовуються для розрахунку власних частот квадратних пластин з різними граничними умовами. Порівняння частот отриманих МСЕ з відомими експериментальними результатами показує, що метод дає хороші

результати.

Метод скінченних елементів широко застосовується для розрахунку частот пластин різної конструктивної неоднорідності, наприклад, п'єзоелектричних коливань кварцових пластин [168, 169], коливань композитних пластин [170, 171], коливань розшарованих композитних пластин [172, 173], коливання пластин з тріщинами [174, 175].

Застосування МСЕ до розрахунку тонкостінних оболонкових конструкцій є одним з найбільш перспективних. Можливості застосування МСЕ в задачах статички і динаміки оболонкових конструкцій представлені у працях [176-178].

У [179] представлено огляд побудови скінченно-елементних сіток для аналізу оболонкових конструкцій. Представлено основні вимоги до оболонкових елементів та розглянуто загальний підхід, який заснований на переміщеннях. Проведено побудови скінченно-елементних сіток різними елементами зі змішаним інтерполюванням тензорних компонентів. Узагальнено теоретичні і чисельні результати, отримані в результаті аналізу пластин і оболонок.

У роботі [180] застосовуючи нетрадиційну схему МСЕ та варіаційний принцип Гамільтона представлено процедуру обчислення осесиметричної динаміки оболонок будь-якої геометрії. У [181] моментною схемою МСЕ здійснюється дискретизація варіаційного рівняння. Як розв'язуючі функції використано швидкості переміщень, апроксимація яких в межах скінченного елемента проводились по полілінійному закону.

Коливання тонкої круглої циліндричної оболонки із закриттям розглянуто методом скінченних елементів у [182]. Отримані результати підтверджені результатами, опублікованими в літературі з використанням різних теорій оболонок. На основі отриманих результатів встановлено вплив на власну частоту коливань відношення товщини затвора до товщини стінки оболонки. Власні значення оболонки визначались за допомогою блочних методів Ланцоша та підпросторових ітераційних методів.

У роботі [183] за допомогою сплайнового методу скінченних елементів проведено аналіз вільних коливань оболонок обертання. Сплайн-елемент, який базується на класичній теорії тонких оболонок, використовує набір функцій форми В-сплайнів для інтерполяції геометрії, а також переміщень. Ефективність і точність запропонованого елемента проілюстровано прикладами в роботі.

МСЕ часто застосовується при дослідженні оболонок складної неоднорідної конструктивності, в той час коли застосування класичних методів є неможливим. Наприклад, МСЕ досліджені характеристики вільних коливань з'єднаної сферично-циліндричної оболонки з різними граничними умовами [184], двох з'єднаних багатошарових конічних оболонок [185], багатошарової композитної похилої циліндричної оболонки [186], багатошарових композитних оболонок подвійної кривизни [187], композитної сферичної оболонки з вирізом [188], круглих тороїдальних оболонок з мередіальними кільцевими ребрами жорсткості [189] та інші.

МСЕ є універсальним методом, який можна застосовувати до задач динаміки пластин і оболонок довільної геометрії з різними конструктивними особливостями: вирізами, усіченнями, ребрами жорсткості, додатковими масами, змінною товщиною, багатошаровістю; з різних ізотропних та композитних матеріалів, а також з різними варіантами граничних умов. В результаті своєї універсальності МСЕ застосовується в роботі багатьох сучасних програмних комплексів для інженерного розрахунку: FEMAP [190], ANSYS [191], ADINA [192], NASTRAN [193], PATRAN [194], ABAQUS [195], LS-DYNA [196], CATIA [197], PRO/ENGINEER [198], CoSMoS [199], HyperWorks [200], MIPELA+ [201] та інші.

Фізичний експеримент або експериментальні дослідження застосовуються для перевірки будь-якого з результатів розрахунків. Чисельний аналіз є лише моделюванням реальної конструкції. Від точності побудови моделі і використання апробованого математичного апарату залежить відповідність результатів дійсності. При експериментальних

дослідженнях використовують різні методи, з яких можна виділити три основні, а саме: тензометричний метод, акустичний метод, метод голографічної інтерферометрії. Огляд багатьох різних експериментальних методів досліджень в механіці деформівного твердого тіла представлено у роботі [202]. З експериментальних досліджень вільних коливань циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом можна відзначити роботи [203-205]. Дослідження вільних коливань пластин можна проводити методом голографічної інтерферометрії [206, 207] або резонансним методом [208].

Часто використовують класичні методи, які базуються на визначенні деформації поверхні за допомогою тензорезисторів і тензорезисторних перетворювачів. Принцип їхньої дії полягає у аналізі приросту лінійних розмірів та переведенні їх в фізичну величину, яку сприймає та реєструє вимірювальний пристрій. Основні поняття та методики тензометрії описані у [209, 210]. У [211] розглянуто окремі аспекти вимірювання вібрацій із використанням тензодатчиків. Для збору та аналізу даних розроблено два віртуальні прилади, за допомогою яких здійснено обробку сигналів і досліджено характеристики та спектри коливань при різних умовах.

При застосуванні акустичного методу коливання звукових частот вловлюються віброщупом, підсилюються і розділяються аналізатором [212-214]. Цей метод не потребує складної підготовки, тому є зручним для застосування як в лабораторіях, так і на підприємствах в реальних умовах експлуатації. Недоліком методу є складності, які виникають при розшифровці одержаних даних, наприклад, при розшифровці форм коливань пластин і оболонок.

Динамічні методи поділяються на резонансні методи та трансмісійно-хвильові методи. В свою чергу резонансні методи поділяються за інтенсивністю збудження: безперервне збудження, імпульсне збудження. Резонансні методи з безперервним збудженням коливань мають можливість плавно змінювати частоту та реєструвати розподіл амплітуди коливань. У

[215] на основі результатів отриманих резонансним методом розраховані пружні постійні матеріалу круглої пластини. Отримані дані засвідчують ефективність резонансних методів, які вирізняються серед інших завдяки безконтактному неруйнівному контролю. Головна ідея резонансних імпульсних методів полягає у збудженні коливань та реєстрації відгуку за допомогою імпульсного впливу з широкосмуговим амплітудно-частотним спектром. Завдяки визначенню спектру відгуку є можливість ідентифікувати частоти вільних коливань. Так як частоти залежать не тільки від геометричних розмірів та фізико-механічних характеристик досліджуваного об'єкта, але й від граничних умов, то, як правило, застосовують граничні умови – вільні торці. Перевагою методу є безконтактне збудження, а також фіксація коливань, наприклад на фотокамеру, що дає змогу знівелювати експериментальні похибки, які можуть виникнути в результаті впливу збудника коливань або приймача.

Трансмісійно-хвильові методи базуються на визначенні швидкості поширення пружних хвиль у матеріалі, що залежить від його пружних властивостей, густини, частоти хвилі та геометричних характеристик.

Одним з представників динамічних методів є метод атомно-силової акустичної мікроскопії, який заснований на зміні частоти резонансу мікромеханічного зонда установки при взаємодії з поверхнею досліджуваного об'єкта [100, 216, 217]. Акустична мікроскопія знаходить застосування в дослідженнях властивостей та власних частот наноб'єктів. Метод реалізується за допомогою зондової мікроскопії [218, 219], проте, має деякі обмеження і недоліки.

Одним із підходів дослідження частот наноб'єктів є оптичний метод [220]. У [221] використано фемтосекундний метод накачування-зондування, щоб збудити й зафіксувати радіальні форми коливань у наночастинках срібла, у [222] використано повністю оптичний метод дослідження, щоб дослідити власні частоти одиничної наночастинки, а у [223] методом бриллюєнівського розсіювання світла було встановлена залежність власних

частот обмежених акустичних мод агрегатів високомонодисперсних срібних нанокубів від розміру частинок.

Дослідження ефективності методу вільних коливань для визначення частот і декрементів затухання власних коливань технічних виробів різної складності представлені у [224]. Даний метод можна застосовувати для дослідження об'єктів складної геометричної форми, також, він не потребує витратних матеріалів, підготовки поверхні об'єкта і застосування складної апаратури [225].

Методи голографічної інтерферометрії та спекл-інтерферометрії відносяться до розряду безконтактних методів дослідження динамічних характеристик пластин і оболонок та мають низку переваг, які описані в [226, 227]. Теорія та практика методу голографічної інтерферометрії та інші оптичні методи добре представлені у [227]. В книзі розглянуті основні етапи експериментального дослідження, описані елементи оптичної схеми та прилади для проведення досліджень. Існує декілька реалізацій методу голографічної інтерферометрії: метод двох експозицій, метод реального часу, метод усереднення у часі, стробогоголографічний метод [228].

У [229] представлено метод запису голограм у зустрічних пучках, який передбачає розміщення реєструючого середовища безпосередньо поблизу досліджуваного об'єкта. Запропонована оптична схема запису голограми дозволяє досліджувати форми малих коливань як пластин так і оболонок. Використовуючи схему запису голограм з методом усереднення у часі можна визначити частоти і форми вільних коливань пластин різної форми з різними способами закріплення, так у [230] розглянута затиснута кругла пластина, а у [231] розглянута затиснута прямокутна пластина.

Метод голографічної інтерферометрії має хорошу чутливість, що дозволяє досліджувати вільні коливання пластин і оболонок довільної форми в діапазоні частот від одного Гц до десятків кГц з амплітудою коливань 10^{-4} мм. Даний експериментальний метод застосовується для визначення динамічні характеристики оболонкових конструкцій [232].

Вивчається можливість застосування голографічного методу для високих тонів коливань при п'єзоелектричному способі збудження оболонки. Результати експериментів показують хорошу збіжність визначених частот з частотами встановленими класичною теорією. У роботах [233–234] методом голографічної інтерферометрії досліджено частоти та форми вільних коливань оболонок нульової гауссової кривини та тонких циліндричних оболонок обертання. Встановлено вплив профілю та кількості отворів, армування пружними ребрами та прикріплених твердих тіл на основні динамічні характеристики оболонкової системи [234].

Метод голографічної інтерферометрії широко застосовується у дослідженнях різних оболонок [235, 236]. У [237] визначено методом стробоголографічної віброметрії частоти і форми вільних коливань консольно закріпленої циліндричної оболонки, а у [238] трьох відкритих консольних циліндричних оболонок. Представлені основні принципи цього методу. Проаналізовано порівняння експериментальних даних з результатами розрахунку. У роботах [239–241] експериментальним методом визначенні частоти і форми вільних коливань лопаток компресора газотурбінного двигуна (ГТД).

Одним з методів просторової інтерферометрії є метод спекл-інтерфгрометрії, який представляє собою аналіз зернистості структури зображення досліджуваного об'єкта. Теорія і застосування методів голографічної і спекл-інтерфгрометрії представлені у [227]. Практична важливість методів обумовлена можливістю здійснення кореляції спеклів в реальному часі і можливість виведення спекл-картини на ЕОМ без фотографічної реєстрації. Метод електронної спекл-інтерферометрії використовувався у [242, 243].

У [244] для дослідження власних частот трапецієподібної пластини була використана електронна спекл-інтерферометрія (ESPI) в режимі реального часу. Пластина збуджувалась акустичним джерелом, яке забезпечувало безперервний діапазон звукових частот. В результаті

проведеного експерименту зареєстровані інтерференційні смуги, які утворились під час запису коливання пластини з усередненням у часі. Для деяких форм коливань, за інтерферограмами та функціями Бесселя нульового порядку, виконані розрахунки амплітуд коливань. Додатково розроблений аналітичний підхід, що базується на методі Релея–Рітца, та на використанні неортогональних правильних трикутних координат. Прогин пластини апроксимується набором характеристичних ортогональних поліномів балки, створених за допомогою процедури Грама–Шмідта. Проведено порівняння отриманих результатів, який показав високий ступінь кореляції між обчислювальним аналізом та експериментом.

У [245] для дослідження коливань пластин із закругленими кутами та фасками з вільними краями запропонована оптична система під назвою амплітудно-флуктуаційна електронна спекл-інтерферометрія (AF-ESPI). Проведено чисельні розрахунки методом скінченних елементів та порівняно результати з експериментальними вимірюваннями. Спостерігається хороше узгодження результатів отриманих двома методами. Виходячи з того, що чіткість смуг інтерферограм спостерігається лише на резонансних частотах, можна дійти висновку що даний експериментальний метод підходить для визначення власних частот і форм вільних коливань пластин.

У [246] для дослідження коливань квадратних ізотропних пластин із різними граничними умовами використовується метод AF-ESPI. Проведено розрахунки методом скінченних елементів та порівняння результатів з результатами експериментальних вимірювань. Метод зручний для дослідження об'єктів, які коливаються, оскільки не вимагає контакту порівняно з класичним дослідженням за допомогою акселерометрів. Система відеозапису миттєво створює якісні інтерференційні смуги.

У [247] для дослідження вільних коливань пластин запропоновано експериментальний метод, що включає в себе AF-ESPI для отримання форм коливань та використання радіальної базисної функції (RBF) для покращення якості рисунків. Проведений експеримент та розрахунок

методом скінченних елементів частот і форм вільних коливань алюмінієвої круглої пластини з закріпленими краями. Аналіз результатів підтвердив ефективність запропонованого експериментального методу.

У [248] розроблено нову методику виявлення дефектів у армованих вуглецевим волокном пластинах. Було проведено частотний аналіз за допомогою ударного збудження. У результаті дослідження отримано перші п'ять резонансних частот для трьох бездефектних і трьох дефектних зразків із хвилястістю волокна. Використана AF-ESPI для отримання форм коливань.

У [249, 250] представлено схему фільтрації з використанням вейвлету Symlet для видалення спекл-шуму з усереднених за часом цифрових спекл-рисуноків інтерференційних смуг. Щоб продемонструвати потенціал вейвлет-фільтрації Symlet, проводяться експерименти з видалення спекл-шуму з смуг, записаних для поверхні жорсткого диска комп'ютера. Експериментальні результати показують, що ця фільтрація значною мірою усуває спекл-шум.

У [251] за допомогою цифрової спекл-інтерферометрії (DSPI) представлено вимірювання статичних і динамічних деформацій у прямокутній пластині закріпленій на одному краї. Для підвищення точності вимірювань розроблено нову схему фільтрації, яка заснована на поєднанні медіанної фільтрації та вейвлет-фільтрації Symlet, яка покращує відношення сигнал/шум (SNR) у спекл-інтерферограмі, яку отримали від DSPI. Експериментальні результати показують хорошу ефективність роботи схеми фільтрації для покращення SNR спекл-інтерферограм. Вимірювання за допомогою DSPI та розрахунки за допомогою теорії балок у випадку статичної деформації і вимірювання за допомогою DSPI та акселерометра у випадку динамічної деформації показують хорошу відповідність. Аналогічний метод використовується у [252].

У [253] реалізована нова схема фільтрації інтерференційних смуг цифрових спекл-рисуноків для покращення відношення SNR. Для

встановлення можливостей нової схеми фільтрації було проведено експеримент на консольній балці. Експериментальні результати показали, що нова схема фільтрації краща за інші відомі схеми фільтрації [249-252, 254], завдяки зменшенню спекл-шуму і покращенню SNR у спекл-інтерферограмах. Нова схема фільтрації реалізована при дослідженні форм коливань квадратних пластин з двома різними граничними умовами: всі краї закріплені; два суміжні краї закріплені, два інших краї вільні. З експериментальних результатів випливає, що рисунки форм коливань більш чіткі при реалізації нової схеми фільтрації в порівнянні з іншими відомими схемами. Проведено порівняння отриманих результатів для обох граничних умов з розрахованими значеннями частот на основі класичної теорії. Результати DSPI показуються добре узгодження з класичною теорією.

У [255] запропоновано методику визначення модуля пружності, яка ґрунтується на аналізі коливань пластини за допомогою DSPI і методу Релея. Проведено велику кількість експериментів на квадратній алюмінієвій пластині для граничних умов: один край зафіксований, інші краї вільні. В ході експерименту встановлено, що дослідження частоти на першому крутильному режимі достатньо для оцінки модуля пружності для всіх практичних цілей з похибкою менше 1%.

Виходячи з проведеного аналізу наукових публікацій можна дійти наступного висновку. Для досліджень коливань пластин і оболонок простої геометрії існує багато аналітичних та теоретичних методів, найпоширенішим з яких є метод Релея-Рітца. У випадку визначення частот і форм вільних коливань пластин і оболонок різної конструктивної неоднорідності або товстостінності багато аналітичних і теоретичних методів втрачають актуальність, оскільки дослідницький процес стає достатньо складним, як через значні труднощі створення математичної моделі, так і через необхідність розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами.

Дослідження складних об'єктів можливо здійснювати за допомогою

чисельних методів, серед яких особливої популярності набрав МСЕ. В огляді літератури наведено достатньо публікацій, щоб зробити висновок про універсальність МСЕ, який необмежений, ані формою досліджуваного об'єкта, ані матеріалом з якого виготовлений об'єкт. Проте результати кожного нового класу задач, розв'язаного МСЕ, необхідно підтверджувати експериментально, оскільки можна допуститись помилок при моделюванні об'єкта на ЕОМ. Серед експериментальних методів добре себе зарекомендували резонансні методи та метод голографічної інтерферометрії, які дають можливість в реальному часі на реальному об'єкті спостерігати форми коливань, бачити момент виникнення резонансу та фіксувати частоту коливань.

Задачам про вільні коливання тонких пластин і оболонок присвячено багато публікацій, в той час як товсті пластини і оболонки розглянуті у недостатній кількості. Пластини розглядаються, в основному, трикутної, квадратної або круглої форми, інколи з отворами. Цікаво буде розглянути різні багатокутні пластини різної товщини з різними граничними умовами на основі різних методів, встановити ряд залежностей спектру частот від різних параметрів та встановити межі застосування кожного з методів.

Оболонки розглядаються в основному тонкостінні з круговим поперечним перерізом, інколи еліптичного поперечного перерізу і дуже мало робіт присвячено гофрованим циліндричним оболонкам. Є необхідним дослідити оболонки з різним гофрованим поперечним перерізом з замкнутим та незамкнутим контуром, дослідити вплив зміни товщини на спектр частот, розглянути товстостінні оболонки.

Дослідження даної дисертаційної роботи спрямовані на розробку та удосконалення чисельних та експериментальних методів для дослідження динамічних характеристик пластин і оболонок з різною конструктивною неоднорідністю. Зроблений огляд літератури підтверджує доцільність та актуальність проведення досліджень в цьому напрямку.

Розділ 2

МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ І ФОРМ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИН І ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

В даному розділі наведено основні співвідношення теорії пружності в рамках теорії Кірхгофа–Лява (пункт 2.1), зроблено постановку задач про вільні коливання циліндричних оболонок (пункт 2.2) та пластин (пункт 2.3).

Представлено зведену формулу вільних коливань квадратної пластини з довільними граничними умовами, яка представляє собою добуток трьох коефіцієнтів: коефіцієнт геометрії; коефіцієнт матеріалу; коефіцієнт форми коливань і граничних умов. Запропоновано поширити метод визначення вільних коливань квадратної пластини на визначення частот багатокутних пластин з довільними граничними умовами на краях (пункт 2.3).

Наведено основні принципи та співвідношення МСЕ. Запропоновано застосувати програмний комплекс інженерного розрахунку FEMAP з розв’язувачем NX Nastran для розрахунків частот і форм вільних коливань пластин і оболонок (ПіО) різної конструктивної неоднорідності (пункт 2.4), який дає можливість дослідити динамічну поведінку побудованої комп’ютерної моделі без значних затрат часу та коштів.

Запропоновано два експериментальні методи: метод голографічної інтерферометрії, який дає можливість безконтактно та з високою точністю досліджувати пластини та оболонки складної форми (пункт 2.5); резонансний метод, який полягає у безперервному збудженні коливань досліджуваної пластини. Обидва методи дають можливість плавно змінювати частоту коливань а при досягненні резонансних частот фіксувати частоту та реєструвати розподіл амплітуд коливань пластин та оболонок (пункт 2.6).

2.1. Основні співвідношення теорії пружності

В класичній постановці задача про коливання пластин та оболонок

формулюється в рамках теорії Кірхгофа–Лява [256] згідно гіпотез:

- прямі лінії, перпендикулярні до серединної поверхні, залишаються прямими після деформації;
- прямі лінії, перпендикулярні до серединної поверхні, залишаються перпендикулярними до серединної поверхні після деформації;
- товщина не змінюється в процесі деформування.

Згідно з цими гіпотезами можна знехтувати певними елементами тензорів напружень і деформацій, що дає можливість зменшити порядок системи рівнянь, яка описує математичну модель поставленої задачі. Класична теорія дає хорошу точність отриманих результатів при дослідженнях пластин (оболонок) зі співвідношенням товщини до їх найменшої сторони (радіуса серединної поверхні) не більше $1/5$.

В теорії пружності часто записують основні співвідношення в криволінійній системі координат, що пов'язане зі складністю форми поверхонь об'єктів, для яких побудована математична модель.

Положення будь-якої точки M просторового тіла в криволінійній системі координат однозначно визначається трьома криволінійними координатами α, β, γ (рис. 2.1), які пов'язані з декартовими координатами x_1, x_2, x_3 :

$$\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3), \quad \beta = \beta(x_1, x_2, x_3), \quad \gamma = \gamma(x_1, x_2, x_3). \quad (2.1)$$

В силу однозначності визначення положення точки M в просторі можна записати зворотній зв'язок декартових координат через криволінійні координати

$$x_1 = x_1(\alpha, \beta, \gamma), \quad x_2 = x_2(\alpha, \beta, \gamma), \quad x_3 = x_3(\alpha, \beta, \gamma). \quad (2.2)$$

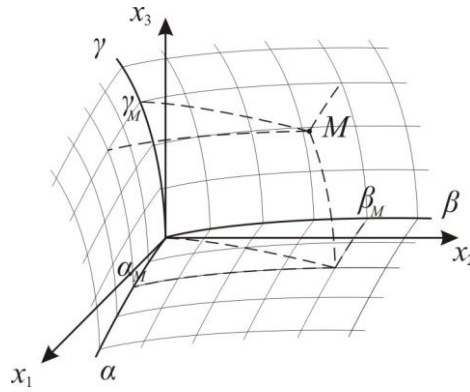


Рис. 2.1. Криволінійна система координат α, β, γ

В криволінійній ортогональній системі координат α, β, γ співвідношення лінійної теорії пружності мають найпростіший вигляд.

Квадрат довжини лінійного елемента визначається співвідношенням

$$ds^2 = H_1^2 d\alpha^2 + H_2^2 d\beta^2 + H_3^2 d\gamma^2, \quad (2.3)$$

де H_1, H_2, H_3 – коефіцієнти Ламе, які є функціями криволінійних координат

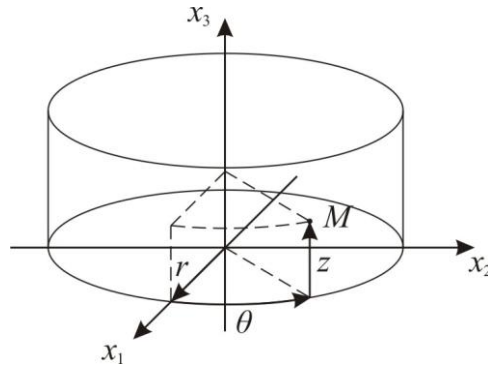
$$\begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \right)^2; \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \beta} \right)^2; \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \gamma} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При розв'язуванні задач теорії пружності для циліндричних тіл зручно використовувати циліндричну систему координат, де криволінійні координати α, β, γ приймають вигляд

$$\alpha = z, \quad \beta = \theta, \quad \gamma = r. \quad (2.5)$$

Для циліндрів кругового поперечного перерізу (рис. 2.2)

$$z = \text{const}, \quad \theta = \text{const}, \quad r = \text{const}, \quad (2.6)$$

Рис. 2.2. Циліндрична система координат z, θ, r

співвідношення (2.2) зв'язку декартових координат x_1, x_2, x_3 і циліндричних мають вигляд

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z. \quad (2.7)$$

У випадку циліндрів еліптичного поперечного перерізу (2.2) записуються як

$$x_1 = a \cos \theta, \quad x_2 = b \sin \theta, \quad x_3 = z. \quad (2.8)$$

де a – велика піввісь еліпса, b – мала піввісь еліпса.

У випадку циліндрів гофрованого еліптичного поперечного перерізу (2.2) набувають вигляду

$$x_1 = [a + A \cos(k\theta)] \cos \theta, \quad x_2 = [b + A \cos(k\theta)] \sin \theta, \quad x_3 = z, \quad (2.9)$$

де A – амплітуда гофра, k – густина гофрування.

Коефіцієнти Ламе (2.4) в циліндричній системі координат приймають значення

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1, \quad (2.10)$$

а в декартовій системі координат

$$H_1 = 1, \quad H_2 = 1, \quad H_3 = 1. \quad (2.11)$$

Під дією зовнішніх навантажень тіло деформується, а переміщення точок його поверхні характеризується вектором повного переміщення $\bar{U}$, який можна розкласти на три компоненти $u_\alpha(\alpha, \beta, \gamma)$, $u_\beta(\alpha, \beta, \gamma)$, $u_\gamma(\alpha, \beta, \gamma)$, які є проекціями вектора $\bar{U}$ на напрямки дотичні до відповідних криволінійних координатних ліній α, β, γ .

Деформація кожної точки M просторового тіла описується трьома відносними лінійними деформаціями ε_α , ε_β , ε_γ у напрямку відповідних координатних ліній та трьома відносними зсувними деформаціями $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\beta\gamma}$, $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ у площинах, дотичних до координатних поверхонь в точці M . Відповідні деформації виражаються через переміщення та називаються співвідношеннями Коші, які записуються для криволінійної системи координат у вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} u_\beta + \frac{1}{H_\alpha H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} u_\gamma, \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{1}{H_\beta H_\gamma} \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} u_\gamma, \\ \varepsilon_\gamma &= \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_\alpha H_\gamma} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{1}{H_\beta H_\gamma} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \gamma} u_\beta,\end{aligned}\tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{H_\alpha} \right) + \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{H_\beta} \right) \right], \\ \varepsilon_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2} \left[\frac{H_\alpha}{H_\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\alpha}{H_\alpha} \right) + \frac{H_\gamma}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\gamma}{H_\gamma} \right) \right], \\ \varepsilon_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \left[\frac{H_\beta}{H_\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\beta}{H_\beta} \right) + \frac{H_\gamma}{H_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\gamma}{H_\gamma} \right) \right].\end{aligned}\tag{2.13}$$

Напружений стан описується трьома нормальними напруженнями σ_α , σ_β , σ_γ на площадках перпендикулярних відповідним координатним лініям α, β, γ , та шістьма дотичними напруженнями $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\beta\alpha}$, $\sigma_{\alpha\gamma}$, $\sigma_{\gamma\alpha}$, $\sigma_{\beta\gamma}$, $\sigma_{\gamma\beta}$, у відповідних площинах. Дотичні напруження є парними тому: $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$, $\sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\gamma\alpha}$, $\sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\gamma\beta}$.

При наявності масових сил $\bar{F}\{F_\alpha, F_\beta, F_\gamma\}$ рівняння рівноваги в криволінійній системі координат записуються у вигляді:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_\beta H_\gamma \sigma_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta}(H_\alpha H_\gamma \sigma_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(H_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha\gamma}) - \sigma_\beta H_\gamma \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} - \\
 & - \sigma_\gamma H_\beta \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} + \sigma_{\alpha\beta} H_\gamma \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} + \sigma_{\alpha\gamma} H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} + F_\alpha H_\alpha H_\beta H_\gamma = 0; \\
 & \frac{\partial}{\partial \beta}(H_\alpha H_\gamma \sigma_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(H_\alpha H_\beta \sigma_{\beta\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_\beta H_\gamma \sigma_{\alpha\beta}) - \sigma_\gamma H_\alpha \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} - \\
 & - \sigma_\alpha H_\gamma \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} + \sigma_{\beta\gamma} H_\alpha \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} + \sigma_{\alpha\beta} H_\gamma \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} + F_\beta H_\alpha H_\beta H_\gamma = 0; \\
 & \frac{\partial}{\partial \gamma}(H_\alpha H_\beta \sigma_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_\beta H_\gamma \sigma_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(H_\alpha H_\gamma \sigma_{\beta\gamma}) - \sigma_\alpha H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} - \\
 & - \sigma_\beta H_\alpha \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} + \sigma_{\alpha\gamma} H_\beta \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} + \sigma_{\beta\gamma} H_\alpha \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} + F_\gamma H_\alpha H_\beta H_\gamma = 0,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

де $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$ – відповідні проекції вектора масових сил на дотичні до координатних ліній α, β, γ .

Компоненти деформації та напружень пов'язані між собою законом Гука, який в узагальненому вигляді для ортотропних тіл запишеться як

$$\begin{aligned}
 \sigma_\alpha &= c_{11}\varepsilon_\alpha + c_{12}\varepsilon_\beta + c_{13}\varepsilon_\gamma, \\
 \sigma_\beta &= c_{12}\varepsilon_\alpha + c_{22}\varepsilon_\beta + c_{23}\varepsilon_\gamma, \\
 \sigma_\gamma &= c_{13}\varepsilon_\alpha + c_{23}\varepsilon_\beta + c_{33}\varepsilon_\gamma, \\
 \sigma_{\alpha\beta} &= 2c_{44}\varepsilon_{\alpha\beta}, \\
 \sigma_{\alpha\gamma} &= 2c_{55}\varepsilon_{\alpha\gamma}, \\
 \sigma_{\beta\gamma} &= 2c_{66}\varepsilon_{\beta\gamma},
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

де c_{ij} – елементи матриці жорсткості. Для ізотропних тіл c_{ij} запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu, \\
c_{12} &= c_{13} = c_{23} = \lambda, \\
c_{44} &= c_{55} = c_{66} = \mu, \\
\mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \\
\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

де E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, λ і μ – параметри Ламе, що визначають матеріальні константи пружності.

2.2. Рівняння коливань оболонок

Тонка ізотропна оболонка (рис. 2.3) в ортогональній системі координат x_1, x_2, x_3 з коефіцієнтами Ламе (2.11) за умови, що координатні лінії x_1 і x_2 на серединній поверхні співпадають з лініями головних кривизн з радіусами кривизни R_1 і R_2 , в рамках гіпотез Кіргхофа–Лява буде мати такі диференціальні рівняння вільних коливань [257]

$$\left. \begin{aligned}
&\frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(N_{11} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_{21} H_1)}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - N_{22} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] - \\
&\quad - \frac{Q_1}{R_1} - \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + q_1 = 0, \\
&\frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(N_{12} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_{22} H_1)}{\partial x_2} - N_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + N_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] - \\
&\quad - \frac{Q_2}{R_2} - \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + q_2 = 0, \\
&\frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(Q_1 H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Q_2 H_1)}{\partial x_2} \right] + \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q_3 = 0, \\
&Q_1 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(M_{11} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_{21} H_1)}{\partial x_2} + M_{12} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - M_{22} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right], \\
&Q_2 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(M_{12} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_{22} H_1)}{\partial x_2} - M_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + M_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right], \\
&\quad N_{12} - N_{21} - \frac{M_{12}}{R_1} + \frac{M_{21}}{R_2} = 0.
\end{aligned} \right\} \tag{2.17}$$

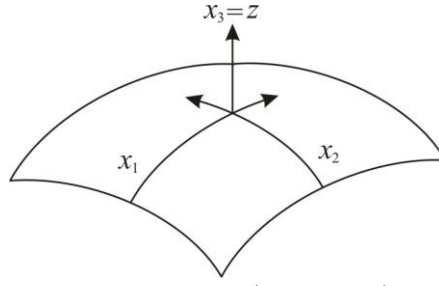


Рис. 2.3. Оболонка в ортогональній системі координат x_1, x_2, x_3

Підставивши вирази для Q_1 і Q_2 у перші три рівняння (2.17) отримаємо три рівняння відносно шести внутрішніх зусиль

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(N_{11} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_{21} H_1)}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - N_{22} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] - \\
 & - \frac{1}{H_1 H_2 R_1} \left[\frac{\partial(M_{11} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_{21} H_1)}{\partial x_2} + M_{12} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - M_{22} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] - \\
 & - \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + q_1 = 0, \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(N_{12} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_{22} H_1)}{\partial x_2} - N_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + N_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] - \\
 & - \frac{1}{H_1 H_2 R_2} \left[\frac{\partial(M_{12} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_{22} H_1)}{\partial x_2} - M_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + M_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] - \\
 & - \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + q_2 = 0, \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (M_{11} H_2) - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} M_{22} + \frac{\partial}{\partial x_2} (M_{21} H_1) + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} M_{12} \right) + \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} (M_{22} H_1) - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} M_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1} (M_{12} H_2) + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} M_{21} \right) \left. \right] + \\
 & + \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Відповідно до першої гіпотези Кірхгофа–Лява запишемо

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0; \quad \varepsilon_{11} = e_{11} - z \kappa_{11}; \quad \varepsilon_{22} = e_{22} - z \kappa_{22}. \tag{2.19}$$

Компоненти деформацій та змін кривизни серединної поверхні можна виразити через компоненти переміщень $u_1, u_2, u_3=w$

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} u_2 + \frac{w}{R_1}, \\
e_{22} &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} u_1 + \frac{w}{R_2}, \\
e_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2}{H_2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{11} &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right), \\
\kappa_{22} &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right), \\
\kappa_{12} = \kappa_{21} &= \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) - \frac{H_1}{R_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{H_2}{R_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Кути повороту нормальних перерізів визначаються за формулами

$$\theta_1 = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1}; \quad \theta_2 = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \tag{2.22}$$

Зв'язок зусиль в серединній поверхні N_{11} , N_{22} , N_{12} , N_{21} та моментів M_{11} , M_{22} , $M_{12}=M_{21}$ з деформаціями серединної поверхні ε_{11} , ε_{22} , $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}$ та змінами кривизн κ_{11} , κ_{22} , $\kappa_{12}=\kappa_{21}$ встановлюється формулами:

$$\begin{aligned}
N_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (e_{11} + \nu e_{22}), & N_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (e_{22} + \nu e_{11}), \\
N_{12} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left(e_{12} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\kappa_{12}}{R_2} \right), & N_{21} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left(e_{12} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\kappa_{12}}{R_1} \right).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= D(\kappa_{11} + \nu \kappa_{22}), \\
M_{22} &= D(\kappa_{22} + \nu \kappa_{11}), \\
M_{12} &= D(1-\nu) \kappa_{12}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Виразимо внутрішні зусилля за допомогою співвідношень пружності (2.23), (2.24) і залежностей (2.20), (2.21) через переміщення u_1 , u_2 , w , в результаті чого отримаємо

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} u_2 + \frac{w}{R_1} + \nu \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} u_1 + \frac{w}{R_2} \right) \right], \\
 N_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} u_1 + \frac{w}{R_2} + \nu \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} u_2 + \frac{w}{R_1} \right) \right], \\
 N_{12} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2}{H_2} \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R_2} \cdot \left[\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{R_1 H_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} u_1 \right) - \frac{1}{R_2 H_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} u_2 \right) \right], \\
 N_{21} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1}{H_1} \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R_1} \cdot \left[\frac{1}{H_2 H_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{R_2 H_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} u_2 \right) - \frac{1}{R_1 H_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} u_1 \right) \right], \\
 M_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \nu \left[\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) + \frac{1}{H_2 H_1} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) \right] \right\}, \\
 M_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) + \frac{1}{H_2 H_1} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \nu \left[\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) \right] \right\}, \\
 M_{12} = M_{21} &= \frac{Eh^3(1-\nu)}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{R_1 H_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{R_2 H_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Підставляючи вирази (2.25) в рівняння (2.18) відносно шести внутрішніх зусиль [42], знайдемо систему трьох загальних рівнянь коливань тонкої пружної оболонки в переміщеннях

$$\left. \begin{aligned} A_1 \ddot{u}_1 + C_{11} u_1 + C_{12} u_2 + C_{13} w &= -q_1(x_1, x_1, t); \\ A_2 \ddot{u}_2 + C_{21} u_1 + C_{22} u_2 + C_{23} w &= -q_2(x_1, x_1, t); \\ A_3 \ddot{w} + C_{31} u_1 + C_{32} u_2 + C_{33} w &= q_3(x_1, x_1, t), \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

де A_1, A_2, A_3 – інерційні диференціальні оператори; $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33}$ – пружні диференціальні оператори; u_1, u_2, w – компоненти переміщення серединної поверхні оболонки, q_1, q_2, q_3 – проекції на координатні вісі інтенсивності навантаження, яке припадає на одиницю площі серединної поверхні.

Коливання пружної тонкої оболонки визначаються трьома двовимірними функціями $u_1(x_1, x_2, t)$, $u_2(x_1, x_2, t)$, $w(x_1, x_2, t)$, які задовольняють систему диференціальних рівнянь (2.26) 16-го порядку.

Систему рівнянь (2.26) подамо у вигляді одного матричного рівняння

$$[A]\{\ddot{u}\} + [C]\{u\} = \{q\}, \quad (2.27)$$

де $[A]$ – діагональна матриця диференціальних інерційних операторів; $[C]$ – матриця пружних диференціальних операторів; $\{u\}$ – матриця-стовпець переміщень; $\{q\}$ – матриця-стовпець інтенсивності поверхневого навантаження.

Граничні умови для краю $x_1 = \text{const}$ оболонки можна задати як

– жорстко закріплений край (C)

$$w = 0, \quad Q_1 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0; \quad (2.28)$$

– шарнірно опертий край (S)

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad N_{11} = 0, \quad u_2 = 0; \quad (2.29)$$

– вільний край (F)

$$Q_1 + \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad M_{11} = 0, \quad N_{11} = 0, \quad N_{12} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0. \quad (2.30)$$

Для кругової циліндричної оболонки в якості координат на серединній поверхні вибрана координата $x_1=x$ вздовж твірної та довжина дуги $x_2=s$ в коловому напрямі (рис. 2.4). При цьому коефіцієнти Ламе $H_1=H_2=1$, а радіус кривизни R_1 прямує до нескінченності $R_2=R=\text{const}$.

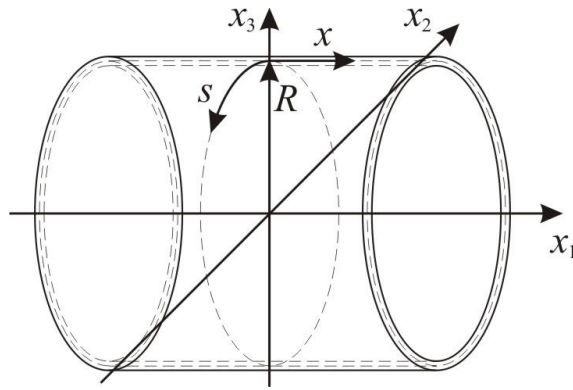


Рис. 2.4. Циліндрична оболонка в системі координат x, s, R

Рівняння коливань кругової циліндричної оболонки через переміщення запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial s} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \right) &+ \\ + \frac{D}{R^2} \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} - (2-\nu)R \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial s} - R \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right] &= \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \cdot \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) + D \left\{ \Delta \Delta w - \frac{1}{R} \left[(2-\nu) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial s} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial s^3} \right] \right\} &= -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Якщо розглядати згинні коливання, то в рівняннях (2.21) для компонентів зміни кривизни можна знехтувати тангенціальними компонентами вектора переміщення

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2}, \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H_1^2 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1}, \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

В свою чергу в перших двох рівняннях (2.17) можна знехтувати тангенціальними силами інерції та силами Q_1 , Q_2 . Припустивши, що тангенціальні компоненти зовнішніх сил q_1 , q_2 рівні нулю, можна ввести функцію напружень χ за виразами

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H_1^2 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \\ N_{22} &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \\ N_{12} = N_{21} &= -\frac{1}{H_1 H_2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.3. Рівняння коливань пластин

Якщо виключити з рівнянь (2.17) зусилля відповідно формулі (2.33) та моменти відповідно формулам (2.24) та (2.32), а також додати рівняння сумісності деформацій, то отримаємо систему диференціальних рівнянь для пологих оболонок [257]

$$D\Delta\Delta w + \Delta_h \chi + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta\Delta \chi - \Delta_h w = 0,$$

де D – циліндрична жорсткість; Δ – загальний оператор Лапласа; w – прогин; ρ – густина матеріалу; q – інтенсивність поперечного навантаження як функція від (x_1, x_2, t) ;

Циліндрична жорсткість визначається із співвідношення

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2.35)$$

Загальний оператор Лапласа Δ та оператор Δ_h задаються виразами

$$\Delta = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right], \quad (2.36)$$

$$\Delta_h = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1 R_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{H_2 R_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]. \quad (2.37)$$

Диференціальне рівняння малих поперечних коливань ізотропної пластини сталої товщини h в ортогональній системі координат x_1, x_2 (рис. 2.5) в рамках гіпотез Кірхгофа–Лява можна отримати з першого рівняння (2.34) з урахуванням, що радіуси кривизни R_1 та R_2 прямують до нескінченності

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q. \quad (2.38)$$

Якщо розглядати недеформівну прямокутну пластину в декартовій

системі координат x_1, x_2 (рис. 2.6), то коефіцієнти Ламе будуть рівні 1, а оператор Лапласа (2.36) запишеться у наступному вигляді

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (2.39)$$

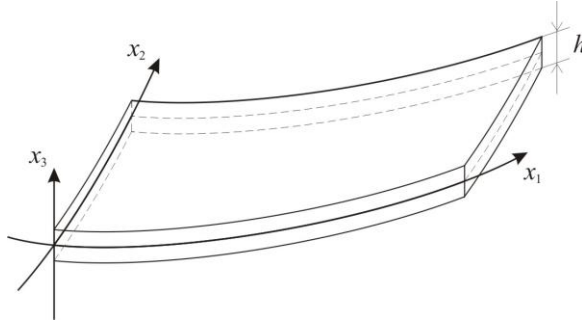


Рис. 2.5. Пластина в ортогональній системі координат $x_1 x_2$

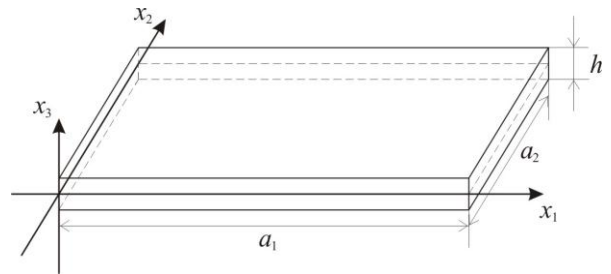


Рис. 2.6. Пластина в декартовій системі координат $x_1 x_2$

Переміщення точок поверхні пластини будуть описуватись рівняннями, що спрощуються відповідно гіпотез Кірхгофа–Лява

$$\varepsilon_{x_3} = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0, \quad \varepsilon_{x_1 x_3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad \varepsilon_{x_2 x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0; \quad (2.40)$$

Оскільки прогини є малими, а задача лінійною, серединна поверхня пластини при згині залишається недеформованою у своїй площині, то

$$u_{10} = u_{20} = 0. \quad (2.41)$$

Якщо проінтегрувати два останні рівняння (2.40) з урахуванням (2.41), то отримаємо

$$u_1 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}. \quad (2.42)$$

Відносні деформації ε_{x_1} , ε_{x_2} , $\varepsilon_{x_1x_2}$ визначаються з рівнянь Коші

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x_1} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \\ \varepsilon_{x_2} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \\ \varepsilon_{x_1x_2} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.\end{aligned}\tag{2.43}$$

З урахуванням другої гіпотези Кірхгофа–Лява рівняння закону Гука запишуться

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x_1} + \nu \varepsilon_{x_2}) = -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \\ \sigma_{x_2} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x_2} + \nu \varepsilon_{x_1}) = -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), \\ \sigma_{x_1x_2} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{x_1x_2} = -\frac{Ex_3}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.\end{aligned}\tag{2.44}$$

На кожному з країв пластини можна задати один з видів граничних умов, наприклад, для краю $x_1 = \text{const}$:

- жорстко закріплений край (C)

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0;\tag{2.45}$$

- шарнірно обпертий край (S)

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0;\tag{2.46}$$

– вільний край (F)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^2 \partial x_1} = 0. \quad (2.47)$$

Власні форми коливань шарнірно обпертої по всім краям прямокутної пластини зі сторонами a_1, a_2 зручно шукати у вигляді

$$w_{(s)} = w_0 \sin \frac{\pi m_s}{a_1} x_1 \cdot \sin \frac{\pi n_s}{a_2} x_2, \quad (m_s, n_s = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.48)$$

де w_0 – амплітуда прогинів, m_s – кількість півхвиль вздовж шарнірно обпертої сторони a_1 пластини, n_s – кількість півхвиль вздовж шарнірно обпертої сторони a_2 пластини, обидві ці величини дають уявлення про форму коливання пластини.

Вираз (2.48) задовольняє кінематичні та статичні граничні умови (2.46). Підставивши (2.48) в рівняння (2.38) за умови відсутності поперечного навантаження $q=0$ та провівши відповідні математичні операції отримаємо вираз для визначення циклічної частоти

$$\omega_{(s)} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a_1^2} + \frac{n^2}{a_2^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \quad (2.49)$$

Дослідимо вільні коливання квадратної пластини $a_1=a_2=a$ з однаковими граничними умовами (S) на всіх краях. Для отримання частот вільних коливань f в Гц необхідно (2.49) поділити на 2π . З урахуванням виразу (2.35) перепишемо (2.49) у вигляді

$$f_{(s)} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{m^2 + n^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\rho h}}. \quad (2.50)$$

У виразі (2.50) справа згрупуємо величини за категоріями: величини що відповідають за геометрію пластини; величини що характеризують матеріал пластини; коефіцієнт, що залежать від форми коливань.

$$f_{(s)} = \left(\frac{h^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \left(\frac{\pi(m^2 + n^2)}{4\sqrt{3}} \right). \quad (2.51)$$

Введемо такі позначення:

$$G = \frac{h}{a^2}; \quad M = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}; \quad F_{(s)} = \frac{\pi(m^2 + n^2)}{4\sqrt{3}}, \quad (2.52)$$

де G – коефіцієнт геометрії, M – коефіцієнт матеріалу; $F_{(s)}$ – коефіцієнт форми коливань шарнірно обпертої по всім краям квадратної пластини.

Відмітимо, що у виразі (2.51) третім множником є величина, яка залежить від конкретної форми коливань пластини шарнірно обпертої по всім краям, а перші два множники є відомими величинами і не залежать ні від граничних умов, ні від форми коливань. Виходячи з цих міркувань, запишемо вираз (2.51) в загальному вигляді як зведену формулу (ЗФ) для розрахунку i -ої частот вільних коливань певної квадратної пластини

$$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i, \quad (2.53)$$

де F_i – коефіцієнт форми коливань і граничних умов квадратної пластини.

Якщо наперед будуть відомі частоти коливань пластин f^* при відповідних граничних умовах, наприклад, визначені експериментально або чисельно, то коефіцієнти F_i можна визначити за формулою

$$F_i = \left(\frac{a^2}{h} \right) \cdot \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} \cdot f_i^*. \quad (2.54)$$

Зробимо припущення, що математична модель, яка виражається ЗФ (2.53) і формулою (2.54), може бути поширена на визначення частот багатокутних пластин, за умови, що a – сторона правильного багатокутника. Даний підхід назвемо комбінованим підходом визначення частот вільних коливань багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами. Це дає можливість відійти від необхідності переходу до неортогональної системи координат та значно спростить математичний апарат.

2.4. Визначення частот і форм вільних коливань МСЕ

Метод скінченних елементів є одним з сучасних чисельних методів, ідея якого полягає в розбивці області визначення неперервної величини на скінченне число малих елементів, які в сукупності апроксимують форму цієї області. В кожному з цих елементів досліджувана неперервна величина апроксимується частинно-неперервною функцією, яка будується на значеннях досліджуваної неперервної величини в скінченому числі точок даного елемента.

Перед розбиттям об'єкта на скінченні елементи потрібно провести додаткові дослідження, щодо вибору типу та розміру скінченного елемента. Погана розбивка приводить до великих похибок. Використання елементів занадто малих розмірів незначно підвищить точність, проте буде причиною громіздких розрахунків, на які витрачається багато часу та комп'ютерного ресурсу. Крім того, можливе накопичення похибки обчислень. Потрібно звернути увагу на те, що на ділянці з очікуваною різкою зміною досліджуваної величин потрібно робити розбиття меншими елементами. Задача про розбиття на скінченні елементи плоских і об'ємних об'єктів є неоднозначною, вона полягає у виборі типу скінченних елементів, які найкращим чином апроксимують досліджувану область.

Скінченні елементи мають спільні точки або вузли, до яких прикладаються деякі фіктивні зусилля взаємодії, які характеризують дію

розподілених внутрішніх напружень, прикладених вздовж реальних границь з'єднання суміжних елементів.

При розбитті достатньо малими скінченними елементами можна вважати, що поле переміщень в межах кожного елемента визначається однозначно лише переміщеннями його вузлів. Поле шуканої функції переміщень в межах елемента представляється як сума добутків його вузлових переміщень та координатних функцій, що визначаються для конкретних типів елементів. Вузлові переміщення виступають як узагальнені переміщення, а відповідні їм координатні функції – як локальні носії, які поширюють вплив вузлових переміщень на область елементів, для яких цей вузол є спільним. В якості апроксимуючих функцій найчастіше обирають лінійні, квадратичні або кубічні поліноми. Поліном можна підібрати кожному елементу таким чином, щоб зберегти неперервність величини вздовж границь елемента.

Представлення реальної конструкції сукупністю дискретних елементів передбачає рівність енергій конструкції та її дискретної моделі. Дотримання енергетичного балансу веде до одержання дискретної моделі, що точно описує поведінку реальної конструкції. Такий баланс характерний для ферм і рам, які складаються з окремих елементів з дискретними з'єднаннями між собою. Якщо елементи реальної конструкції мають вздовж своїх границь неперервні зв'язки із суміжними елементами, то при побудові дискретної моделі використовують припущення про характер силової чи кінематичної взаємодії між суміжними елементами. В такому випадку дискретна модель наближено відображає поведінку реальної конструкції. Важливим моментом є вибір характеру взаємодії між елементами, оскільки зменшення розмірів скінченних елементів призводить до отримання розв'язку, що прямує до точного.

В першому розділі дисертації було зазначено, що в результаті своєї універсальності МСЕ застосовують в роботі багатьох сучасних програмних комплексів для інженерних розрахунків. Однією з таких програм є система

автоматизованого проектування та розрахунку FEMAP з розв'язувачем NX Nastran від Siemens PLM Software.

Базові модулі FEMAP дають можливість проводити різноманітний інженерний аналіз: лінійний статичний аналіз, нелінійний аналіз, розрахунок частот і форм вільних коливань, дослідження втрати стійкості конструкцій та інше. Програмний комплекс FEMAP широко застосовують для моделювання складних конструкцій, систем і процесів, наприклад, космічних кораблів, будівельних споруд, військової техніки та різних технологічних обладнань. Аналіз елементів конструкцій включає в себе такі етапи [190]:

- аналіз геометрії реальної конструкції, визначення зовнішнього навантаження, встановлення фізико-механічних властивостей матеріалу, розробка розрахункової моделі;
- введення в програмне середовище теплофізичних і механічних властивостей матеріалів;
- створення геометричної моделі об'єкта дослідження та на її основі скінченно-елементної моделі (можливе створення скінченно-елементної моделі безпосередньо, без геометричної);
- введення граничних умов;
- встановлення параметрів розрахунків та проведення розрахунків;
- візуалізація отриманих результатів розрахунків та їх критичний аналіз;
- модифікація скінченно-елементної моделі об'єкта, корегування попередньо введених параметрів та повторний розрахунок;
- фіксація отриманих результатів розрахунків.

2.4.1. Основні співвідношення MCE для plate-елемента

Припустимо, що маємо пластину розбиту прямокутними чотиривузловими plate-елементами (рис. 2.7) розміром a , b , які мають в кожному вузлі по три узагальнені переміщення: переміщення u напрямі вісі z , поворот відносно вісі x та поворот відносно вісі y , тобто положення вибраного скінченного

елемента визначається дванадцятьма узагальненими координатами $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}$.

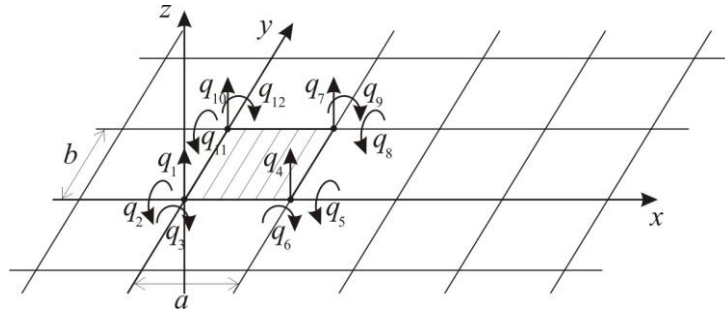


Рис. 2.7. Plate-елемент розміром a, b

Як було згадано вище, в якості апроксимуючих функцій найчастіше обирають лінійні, квадратичні або кубічні поліноми, в даному випадку прогин пластини представимо поліномом виду

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (2.55)$$

Узагальнені координати запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} q_1 &= w(0, 0), & q_2 &= \frac{\partial w}{\partial x}(0, 0), & q_3 &= \frac{\partial w}{\partial y}(0, 0), \\ q_4 &= w(a, 0), & q_5 &= \frac{\partial w}{\partial x}(a, 0), & q_6 &= \frac{\partial w}{\partial y}(a, 0), \\ q_7 &= w(a, b), & q_8 &= \frac{\partial w}{\partial x}(a, b), & q_9 &= \frac{\partial w}{\partial y}(a, b), \\ q_{10} &= w(0, b), & q_{11} &= \frac{\partial w}{\partial x}(0, b), & q_{12} &= \frac{\partial w}{\partial y}(0, b). \end{aligned} \quad (2.56)$$

З урахуванням (2.56) можна записати вектор вузлових переміщень

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} &= \left[w_1, \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right), w_2, \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right), w_3, \left(\frac{\partial w_3}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial w_3}{\partial y} \right), w_4, \left(\frac{\partial w_4}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial w_4}{\partial y} \right) \right]^T = \\ &= (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})^T. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Встановивши коефіцієнти α_i в (2.55) через узагальнені координати (2.56), підставивши в (2.55) та скомпонувавши відносно q_i , з урахуванням (2.57) отримаємо

$$w(x, y) = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad (2.58)$$

де $\mathbf{N}$ – матриця виду

$$\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}], \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 2 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{y^2}{b^2}\right), \quad N_2 = a \left(\frac{y}{b} - 1\right) \left(\frac{x}{a} - 1\right) \frac{x}{a}, \\ N_3 &= b \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \frac{y}{b}, \quad N_4 = 2 \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{x}{a} \left(\frac{2x}{3a} + \frac{1}{2} \frac{y}{b} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \\ N_5 &= a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{x^2}{a^2}, \quad N_6 = b \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \frac{x}{a} \frac{y}{b}, \\ N_7 &= \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left(3 \frac{x}{a} + 3 \frac{y}{b} - 1 - 2 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{y^2}{b^2}\right), \quad N_8 = -a \frac{x^2}{a^2} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right), \\ N_9 &= b \frac{y^2}{b^2} \frac{x}{a} \left(\frac{y}{b} - 1\right), \quad N_{10} = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + 3 \frac{y}{b} - 2 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{y^2}{b^2}\right), \\ N_{11} &= a \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2, \quad N_{12} = -b \frac{y^2}{b^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Матрицю жорсткості скінченного елемента можна отримати з потенціальної енергії деформації елемента

$$\frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^T \mathbf{K} \dot{\Phi}. \quad (2.60)$$

Підставляючи значення деформацій (2.43) та напружень (2.44) в (2.60) та проінтегрувавши по z одержимо

$$\mathbf{K} = \int_0^a \int_0^b D \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} + \\ & + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \end{aligned} \right) dx dy. \quad (2.61)$$

Відповідні співвідношення можна вивести для інших типів скінченних елементів з різною кількістю вузлів.

2.4.2. Рівняння вільних коливань в МСЕ

При розрахунку частот і форм вільних коливань методом скінченних елементів використовуються рівняння руху механічної системи (МС) зі скінченною кількістю ступенів вільності, які в разі відсутності зовнішніх сил описуються системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (2.62)$$

де $L = T - U$.

Записавши в дискретній формі функціонал кінетичної енергії та функціонал енергії деформації

$$T = \frac{1}{2} \dot{\Phi}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\Phi}_i; \quad U = \frac{1}{2} \dot{\Phi}_i^T \mathbf{K}_i \dot{\Phi}_i, \quad (2.63)$$

де $\mathbf{M}_i$ та $\mathbf{K}_i$ – матриця мас та матриця жорсткості i -го скінченного елемента;

$\vec{\Phi}_i$ – вектор вузлових переміщень i -го елемента, з рівняння Лагранжа II роду (2.62), якщо демпфування відсутнє, отримаємо такі рівняння руху

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j + \mathbf{M}\ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (2.64)$$

де $\mathbf{M}$ та $\mathbf{K}$ – матриця мас та матриця жорсткості МС; $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів МС, що відповідає j -му ступеню вільності та формує j -ту форму вільних коливань. Рівняння (2.64) є формою запису рівняння (2.27) в інших позначеннях та за умови відсутності поверхневих навантажень.

Під час вільних коливань ПіО усі вузлові точки скінченно-елементної сітки коливаються гармонічно як функція часу.

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (2.65)$$

Підставивши (2.65) у (2.64), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження частот і форм вільних коливань

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.66)$$

де ω_j – частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення частот і форм вільних коливань, якщо не враховувати демпфування та дисипацію енергії, застосовує метод Ланцоша, який потребує менше ресурсів у порівнянні з іншими методами. Даний метод розраховує n -ну кількість частот і форм вільних коливань з достатньо малою похибкою розрахунків $\|\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}\vec{\Phi}_j\| / \|\vec{\Phi}_j\| \leq 10^{-7}$.

За цим методом матриця $\mathbf{T}$ зводиться до трьохдіагонального вигляду

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_k, \quad (2.67)$$

де $\mathbf{Q}_k = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_k\}$ – прямокутна матриця з елементами $N_{eq} \times k$; N_{eq} – кількість рівнянь; k – номер кроку; $\vec{q}_k$ – k -й вектор Ланцоша.

Вираз

$$\beta_{k+1} \vec{q}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \vec{q}_k - \alpha_k \vec{q}_k - \beta_k \vec{q}_k \quad (2.68)$$

здійснює побудову наступного вектору Ланцоша q_{k+1} та встановлює значення для відповідного рядка матриці $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \beta_k & \alpha_k \end{vmatrix}.$$

Як результат отримаємо задачу на власні значення:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \vec{s}_h^k - \lambda_h^k \vec{s}_h^k &= 0, \quad h=1,2,\dots,k, \\ (\omega_h^k)^2 &= 1/\lambda_h^k, \end{aligned} \quad (2.69)$$

де ω_h^k – k -та апроксимація кругової частоти ω_h , $h=1,2,\dots,n$; n – число власних пар.

Розрахунки виконуються доти, доки не буде забезпечено необхідну точність для кожного з шуканих власних значень.

Надійність та стійкість обчислень можливі за рахунок правильної процедури вибіркової ортогоналізації, яка забезпечує потрібний рівень ортогоналізації векторів Ланцоша q_k . При цьому використовуються економні

методи реалізації процедури вибіркової ортогоналізації до розрахунку власних значень (2.69) за допомогою застосування подвійних QR-ітерацій зі зсувами. Вихідні власні вектори визначаються за формулою

$$\vec{\Phi}_h^k = Q\vec{s}_h^k, \quad h=1, 2, \dots, n. \quad (2.70)$$

Особливість методу Ланцоша полягає у використанні матриці вихідного оператора у вигляді матрично-векторних операцій, що дозволяє ефективно застосовувати його до розріджених матриць великої розмірності, незалежно від їхньої структури. Ця процедура є ітеративною процедурою побудови базису підпростору Крилова, в свою чергу вихідний оператор можна представити як дійсну симетричну тридіагональну матрицю в якій пари Рітца апроксимують власні пари вихідного оператора. Згідно теорії Каніела-Пейджа оцінки різниць відповідних власних значень вихідної матриці та їх апроксимацій можна отримати заміною характеристичного полінома на поліном Чебішева. За цією теорією збіжність до власних значень на краях спектра відбувається швидше, при цьому збіжність швидша чим більша відносна віддаленість зовнішніх власних значень від внутрішніх.

2.5. Визначення частот і форм вільних коливань методом стробогологографічної інтерферометрії

Голографія – це метод запису і відтворення просторових хвильових полів шляхом реєстрації інтерференції двох когерентних хвиль та відтворення їх дифракції на зафіксованій просторовій структурі, наприклад, фотопластинці [258]. Для створення голограми необхідно на поверхню фотопластини одночасно звести два когерентних світлових пучки, один з яких – утворений в результаті відбивання від об’єкта спостереження і називається предметний, другий, що приходить безпосередньо від лазера – опорний. Світло від обох пучків інтерферує, в результаті чого створюється інтерференційна картина, яка на пластині після фотохімічної обробки відображається як чергування дуже вузьких темних і світлих смуг. Якщо на фотопластинці зафіксувати

результат інтерференції опорної (1) та предметної (2) хвилі (рис. 2.8), а потім отриману голограму освітити лише опорною (1) хвилею, то голограма перетворює опорну хвилю на копію предметної хвилі (рис. 2.9). Голограма дає можливість відновити як уявне, так і дійсне зображення об'єкта, що досліджується. Важлива властивість голограми полягає в тому, що вона дозволяє одночасно відновити точні копії світлових хвиль, що відбивались від об'єкта в різні моменти часу та при різних станах об'єкта. При накладанні цих хвиль виникає інтерференційна картина, яка несе інформацію про зміни хвильового фронту і є голографічною інтерферограмою. Хвиля порядку $k=+1$ (рис. 2.9) показує ідентичність предметної та відновленої хвиль, тобто пояснює принцип голографічного запису і показує уявне зображення об'єкта голографування, хвиля порядку $k=0$ є продовженням відновлюючої хвилі, хвиля порядку $k=-1$ формує дійсне зображення.

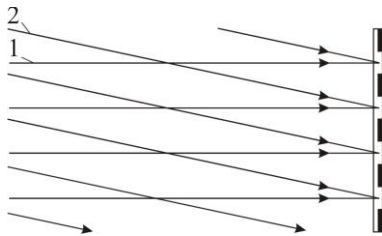


Рис. 2.8. Схема запису голограми

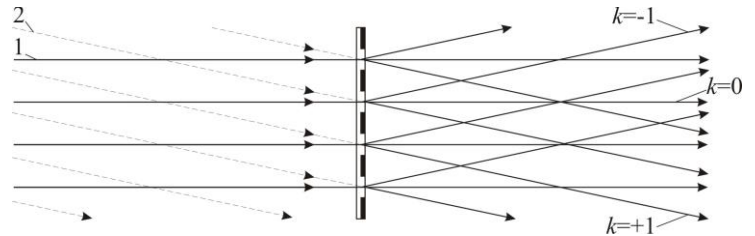


Рис. 2.9. Схема відновлення голограми

Голографічна інтерферометрія, на відміну від класичної інтерферометрії, дає можливість досліджувати об'єкти складної форми з різною якістю обробки поверхні. Принцип голографічних вимірювань для об'єктів з дифузно-відбивною поверхнею полягає в інтерферометричному порівнянні хвиль, які відбиті об'єктом в деформованому та недеформованому станах.

Дане порівняння можна проводити двома способами: в реальному часі та подвійною експозицією. В першому випадку об'єкт фіксують на голограмі у вихідному стані, потім отриману голографічну копію світлової хвилі в реальному часі порівнюють зі світловою хвилею, що відбивається деформованим об'єктом. В другому випадку на голограмі реєструють обидва

стану об'єкта та спостерігають результат накладання двох світлових хвиль, відновлених голограмою. Голографічна інтерферометрія в реальному часі відрізняється від двоекспозиційної тим, що на голограмі реєструється об'єкт лише в одному стані, тобто реєструється опорна голограма. Після фотохімічної обробки голограма з інтерферометричною точністю встановлюється на місце експонування. У результаті за голограмою відбувається інтерференція предметної хвилі та її голографічної копії. Якщо при цьому з об'єктом відбуваються деформації, які призводять до виникнення фазового зсуву в предметній хвилі по відношенню до її копії, то виникає інтерференційна картина, що спостерігається в реальному часі.

Як і в методі двох експозицій, інтенсивність результуючої хвилі буде промодульована за гармонічним законом

$$I(x, y) \sim 2[1 + \cos \delta(x, y)]. \quad (2.71)$$

Вираз (2.71) показує, що голограма відновить предметну хвилю, яка промодельована інтерференційними смугами $2[1 + \cos \delta(x, y)]$. На ділянках хвильового поля, де $\delta = 2n\pi$ – отримаємо світлі смуги, а де $\delta = (2n + 1)\pi$ – темні смуги ($n = 0, 1, 2, \dots$).

В обох випадках умову виникнення інтерференції для кожної точки поверхні об'єкта можна записати у вигляді:

$$N\lambda = U(\cos \alpha + \cos \beta), \quad (2.72)$$

де λ – довжина світлової хвилі; N – порядок смуги, який відповідає точці на поверхні об'єкта; U – переміщення точки поверхні об'єкта; α – кут між вектором переміщення та хвильовим вектором освітлення; β – кут між вектором переміщення та вектором спостереження.

Голографічне зображення об'єкта при цьому вкрите системою

інтерференційних смуг, які проходять через точки рівних різниць ходу променів.

При дослідженні коливань методом реального часу інтерференційну картину можна спостерігати в реальному часі, що дозволяє точно встановити момент виникнення резонансу, вибрати необхідний режим віброзбудження та відносно швидко дослідити спектр частот та форм вільних коливань.

Для дослідження коливань ПіО метод голографічної інтерферометрії застосовується у двох модифікаціях: метод усереднення у часі та метод стробогоголографічної інтерферометрії. При усередненні у часі досліджуваний об'єкт вібрацій реєструється на голограмі при освітленні безперервним світловим пучком. Відновлена голограма відтворює два уявні зображення в протифазних положеннях, віддалені одне від одного на відстань, яка рівна подвоєній амплітуді коливань. Інтерференція цих хвиль призводить до утворення інтерферограми. У вузлах коливань яскравість зображення висока, а зі збільшенням амплітуди вона зменшується, що призводить до різкого зниження контрасту інтерференційних смуг. Відповідні розрахунки показують, що при гармонічних коливаннях яскравість точок зображення поверхні об'єкта, відновленого із усередненої у часі голограми, виражається залежністю:

$$I \approx \alpha^2 \gamma_0^2 (4\pi A / \lambda), \quad (2.73)$$

де I – яскравість точки у відновлювальному зображенні; γ_0 – функція Бесселя першого роду нульового порядку; A – амплітуда коливань точки; α – амплітуда світлової хвилі; λ – довжина світлової хвилі.

Зменшення яскравості смуг із збільшенням амплітуди коливань пояснюється наявністю некогерентного підсвічування під час проходження поверхні досліджуваного об'єкта проміжних положень між амплітудами коливань. При оцінці розподілу амплітуд коливань поверхні об'єкта по інтерферограмі форм коливань, усереднених у часі, виникають проблеми

точності визначення координат смуг інтерференції. Для вирішення цієї проблеми застосовується метод стробогологографічної інтерферометрії, завдяки якому суттєво підвищується контрастність смуг і точність меж вимірювання. Щоб отримати високу контрастність інтерференційної картини по всій поверхні об'єкта, що коливається, необхідно прибрати засвічення голограми в ті моменти часу, коли об'єкт проходить проміжні положення між амплітудними положеннями. З цією метою зручно використовувати стробоскопічну реєстрацію голограми, ідея якої полягає у синхронізації стробоімпульсів з амплітудними станами об'єкта. Тобто поверхня вібруючого об'єкта при голографуванні підсвічується тільки в певні моменти часу, наприклад, у моменти, що відповідають амплітудним значенням коливань. Модуляцію випромінювання здійснюють електрооптичним модулятором. Імпульсне освітлення ефективно використовується для періодичних коливань. Даний метод реєстрації інтерферограм називається стробогологографічним. Порівняно з методом усереднення контраст смуг суттєво зростає, розширюються межі вимірювання, проте експеримент ускладнюється: потрібен оптичний модулятор, синхронізація із джерелом досліджуваних коливань, узгодження при виборі тривалості світлових імпульсів. Якщо імпульси дуже короткі, може стати проблема з часом експозиції. При зростанні тривалості імпульсів падає контраст інтерференційних смуг.

Якщо імпульс освітлення досить короткий, то даний метод еквівалентний методу голографічної інтерферометрії нерухомих об'єктів у часі. Однак світловий імпульс може підсвічувати збуджену поверхню в будь-якій з фаз коливань, що дає можливість порівнювати положення поверхні в будь-якій фазі коливань з її нерухомим положенням. Також є можливість змінювати частоту коливань, тобто досліджувати модову структуру коливань у широкому діапазоні частот, при цьому світлові імпульси синхронізуються із коливаннями поверхні. Таким способом можна вивчати гострі резонанси. Модифікація стробогологографічного методу дозволяє спостерігати зміну

інтерференційної картини зі збільшенням амплітуди коливань від нуля до певної величини у випадку, коли контрастність смуг є незадовільною, чи при наближенні частоти коливань до резонансної. Також стає можливим визначати положення вузлових ліній форм коливань на фіксованій частоті та визначати відносну фазу коливань для всіх точок модової картини вібрацій.

Для реєстрації голограми потрібно мати джерело випромінювання, яке має необхідну часову та просторову когерентність, а також має достатню потужність при необхідній довжині хвилі світла. Оптичні квантові генератори або лазери в повній мірі задовольняють описані вимоги. Оскільки під час процесу експонування і проявлення голограм змінюється індекс заломлення n , величина амплітудного проникнення $\tau = a_{\text{вих}} / a_{\text{над}}$, а також товщина шару реєструючого середовища h , то важливим етапом є правильний вибір реєструючого середовища. Також, до основних характеристик реєструючих середовищ належать: роздільна здатність ν_c , дифракційна ефективність η , чутливість і лінійність запису [259]. Крім цього, спектральні характеристики реєструючого середовища мають узгоджуватись із спектральними характеристиками випромінювання квантового генератора. Щоб забезпечити якісну реєстрацію інтерференційної картини, роздільна здатність середовища ν_c повинна перевищувати просторову частоту інтерференційної структури ν . У разі використання неосьової схеми запису голограм роздільну здатність визначають за формулою:

$$\nu_c > \nu = (2 / \lambda) \sin \varphi, \quad (2.74)$$

де λ – довжина хвилі; φ – половина кута між напрямком опорного та предметного пучка. Залежно від довжини хвилі джерела випромінювання змінюються чутливість і роздільна здатність фотоматеріалу: при зменшенні λ спостерігається зниження роздільної здатності через розсіювання світла.

Реєстрація голограми здійснюється за етапами: формування інтерференційної картини, її запис на фоточутливий матеріал, хімічна

обробка, а також реконструкція отриманого зображення.

В наслідок нерівномірної усадки емульсії, а також зміни оптичних характеристик, на поверхні фотопластини крім чергування світлих та темних смуг, можна спостерігати зміну рельєфу поверхні. Виходячи з цього, голограми, які отримані на галогенодосрібних фотоматеріалах не є ідеально амплітудними, оскільки дифракція світла є наслідком як зміни коефіцієнта пропускання $\Delta\tau$, так й зміни товщини шару Δh , що на пряму залежить від часу експозиції та методики хімічної обробки.

Для побудови оптичної схеми, крім джерела когерентного світла, слід використовувати оптичні елементи, які забезпечують зміну на пряму лазерного променя, його поділ на предметний та опорний пучки, а також трансформацію хвильового фронту з плоского у сферичний тощо.

Для відбиття лазерних променів слід застосовувати дзеркала з поверхневим відбивним покриттям, інакше виникає інтерференція між хвилями, що відбиваються від зовнішньої та робочої поверхонь дзеркала, що спричиняє небажану модуляцію променю.

Світлоділником слугує клиноподібна скляна пластинка, яка забезпечує просторове розділення променя на два за рахунок відбиття від обох поверхонь скляного клину.

Трансформація хвильового фронту з плоского у сферичний можлива при використанні мікрооб'єктива, в фокусі якого необхідно розмістити фільтр – мікродіофрагму, який забезпечує пропускання основного пучка, затримуючи дифракційне світло.

Амплітудна модуляція лазерного випромінювання забезпечується включенням в оптичну схему електрооптичного модулятора, принцип дії якого полягає у використанні ефекту Керра в рідких оптично активних середовищах або використанні ефекту Поккельса в оптично активних кристалах [260].

Збудження коливань ПіО створюється вібраційними пристроями різних видів, вібробуджуючий сигнал яких формується звуковим генератором

частот та підсилювачем низьких частот.

2.6. Визначення частот і форм вільних коливань резонансним методом

Головна ідея резонансних методів полягає у безперервному збудженні коливань досліджуваного об'єкта з можливістю плавно змінювати частоту коливань, при досягненні резонансних частот фіксується частота та реєструється розподіл амплітуд коливань по поверхні об'єкта.

Резонансний метод є простим та зручним, має малу похибку отриманих результатів, яка залежить від точності відтворення відповідної частоти коливань збуджуючого пристрою, його контакту з досліджуваним об'єктом, діапазону відтворювальних частот, якості досліджуваного об'єкта, температури та вологості повітря.

Принцип дії резонансного методу полягає у порівнянні частоти коливань досліджуваного об'єкта $f_{д.об.}$ з частотою збудника коливань $f_{вим.}$ – резонатора, який створює вимушені коливання. Досліджуваний об'єкт коливається під впливом дії резонатора, який певним чином передає об'єкту коливання з частотою, яка плавно змінюється на резонаторі. Якщо інтенсивність коливань досліджуваного об'єкта різко збільшується, то можна стверджувати, що спостерігаються стоячі хвилі, які виникають при резонансі. Частота вимушених коливань $f_{вим.}$, створених резонатором, співпадає з частотами власних коливань об'єкта $f_{вл.}$, тобто $f_{вим.} = f_{д.об.} = f_{вл.}$.

Вимірювальний пристрій або комплекс, який працює на основі цього методу, називається резонансним частотоміром. Зазвичай такі пристрої застосовують для дослідження високих частот, але можуть застосовуватись й до нижчих частот. Резонансні частотоміри мають просту будову та зручні у використанні.

До резонансних методів можна віднести експеримент Хладні [1]. Для проведення експерименту брали квадратну пластинку та жорстко затискали її в центрі. Посипали її поверхню дрібними сферичними частинками, наприклад, піском. Затискали двома пальцями невелику ділянку на будь-якій

зі сторін пластини, наприклад в центрі сторони. Проводили смичком по вільній стороні пластини ближче до одного з кутів. В результаті пластина починала коливатись, на її поверхні виникали стоячі хвилі, а дрібні частинки створювали рисунок. Частинки переміщувалися на місця вузлових ліній. В даному випадку, спостерігалися дві вузлові лінії, які розділяють великий квадрат на чотири менші квадрати (рис. 2.10. *а*). Знаки «+» і «-» показують протилежні напрямки переміщень, а вузлові лінії позначають межі цих протилежних переміщень. Якщо посипати поверхню пластини ще раз дрібними частинками, затиснути пальцями один з кутів пластини і провести смичком по середині одного з країв, то можна отримати інший рисунок (рис. 2.10. *б*). Таким чином, в місці затискання пластини створюються вузлові лінії. Рисунки, які утворюються в результаті описаного експерименту, називаються рисунками Хладні (рис. 2.11).

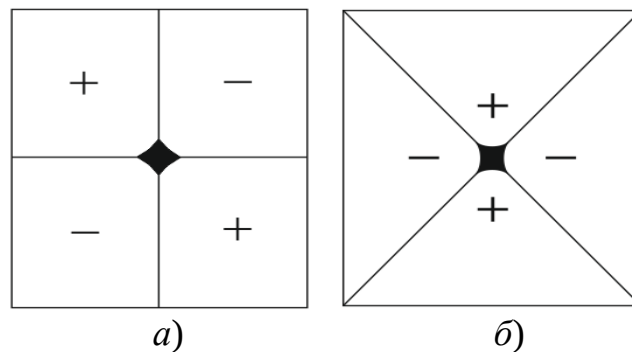


Рис. 2.10. Фігури в класичному експерименті Хладні

Класичний експеримент є нескладним і дає можливість встановити форми коливань, але не дає уявлення про порядок їх появи та не визначає частоти вільних коливань пластини. Даний метод необхідно допрацювати, створити електронний резонатор з можливістю змінювати частоту.

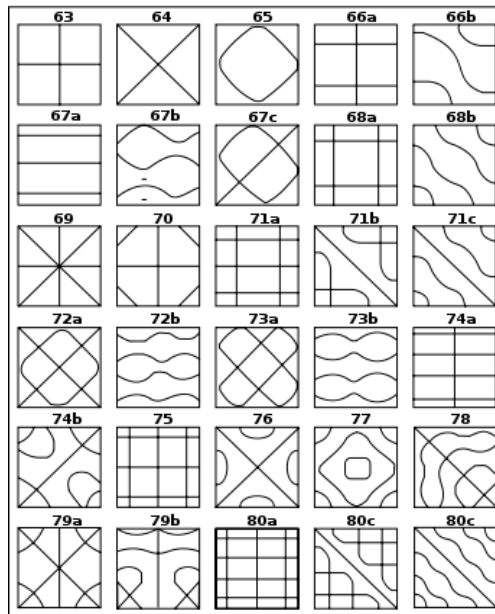


Рис. 2.11. Набір фігур Хладні [1]

2.7. Результати та висновки

1. Наведено основні співвідношення теорії пружності та теорії коливань пластин та оболонок в рамках теорії Кірхгофа–Лява, які є основою для постановки задач про вільні коливання пласти і оболонок.
2. Зроблено постановку задач про вільні коливання циліндричних оболонок та багатокутних пластин.
3. Представлено математичну модель вільних коливань квадратної пластини з довільними граничними умовами, особливістю якої є поділ величин у формулі частот вільних коливань на коефіцієнти, що відповідають за геометрію пластини, коефіцієнти, що відповідають за матеріал пластини та коефіцієнт форм коливань та граничних умов. Останній коефіцієнт можна визначити експериментально або чисельно.
4. Запропоновано поширити метод визначення вільних коливань квадратної пластини з довільними граничними умовами на визначення частот багатокутних пластин та дати йому назву – комбінований підхід, що дає можливість відійти від необхідності переходу до неортогональної системи координат із застосуванням складного математичного апарату.
5. Наведено основні співвідношення методу скінченних елементів для

розрахунків частот і форм вільних коливань пластин і оболонок різної конструктивної неоднорідності. Запропоновано застосування для досліджень вільних коливань програмний комплекс для інженерних розрахунків FEMAP з розв'язувачем NX Nastran, який працює на основі MCE та дає можливість без значних затрат часу та коштів визначати n -ну кількість необхідних власних значень і форм, при цьому результати можна вважати практично точними.

6. Запропоновано метод голографічної інтерферометрії, який дає можливість безконтактно та з високою точністю досліджувати пластини та оболонки складної форми. Наведено основи голографічної інтерферометрії, способи покращення якості отриманих інтерферограм, пристрої та прилади для проведення експерименту.

7. Запропоновано резонансний метод, який полягає у безперервному збудженні коливань досліджуваного об'єкта з можливістю плавно змінювати частоту коливань, а при досягненні резонансних частот фіксувати частоту та реєструвати розподіл амплітуд коливань по поверхні плоского об'єкта. Представлено експеримент Хладні, який дає можливість встановити форми коливань квадратної пластини з вільними краями, але не дає уявлення про порядок їх появи та не визначає частоти вільних коливань пластини. Запропоновано вдосконалити експеримент Хладні сучасним електронним резонатором з можливістю змінювати частоту.

Розділ 3

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОКУТНИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Проблематика вільних коливань пластин досліджується вже тривалий час. Серед різних підходів досліджень метод скінченних елементів (МСЕ) посідає важливу роль, оскільки, необмежений складністю геометрії та складністю накладених граничних умов. В світовій літературі більшість публікацій присвяченні дослідженням вільних коливань квадратних та круглих пластин, незначна кількість публікацій присвячена багатокутним пластинам з деякими граничними умовами та мало інформації наведено про форми вільних коливань та залежності частот від різних параметрів багатокутних пластин.

В даному розділі для проведення розрахунків МСЕ та побудови коректної скінченно-елементної моделі пластини проведено дослідження вибору типу та розміру скінченного елемента з урахуванням оптимального комп'ютерного часу розрахунку та збіжності отриманих результатів. Проведено оцінку достовірності отриманих результатів розрахунку МСЕ в програмному середовищі FEMAP за допомогою розв'язування двох тестових задач та порівнянням отриманих результатів з результатами отриманими експериментально та іншою реалізацією МСЕ.

Проведено розрахунок частот та форм вільних коливань багатокутних пластин правильної форми при різних граничних умовах та встановлено коефіцієнти граничних умов для різних варіантів жорстко закріплених та вільних країв. Розраховано частоти вільних коливань багатокутних пластин з десяти різних матеріалів та різної товщини в межах співвідношень товщини пластини до її сторони h/a від $1/240$ до $1/5$. Встановлено залежності частот вільних коливань від фізико-механічних властивостей матеріалу пластини. Встановлено частотні коефіцієнти багатокутних пластин різної товщини. Визначенно поперечні форми коливань та планарні форми коливань.

3.1. Вибір типу та розміру скінченного елемента для розрахунку пластин різної товщини

Для проведення розрахунків частот та форм вільних коливань методом скінченних елементів необхідно коректно побудувати розрахункову скінченно-елементну модель, правильно обрати вид скінченного елемента та його розмір для забезпечення оптимального комп'ютерного часу розрахунку та точності отриманих результатів.

Дослідження вибору типу і розміру скінченного елемента (plate, brick, tetra) (рис. 3.1) будемо проводити на скінченно-елементних моделях (рис. 3.2) пластин у вигляді правильних трикутників різної товщини з вільними краями з параметрами: сторона пластини $a = 0,24\text{ м}$, товщини $h = 0,004\text{ м}$ і $h = 0,024\text{ м}$ (співвідношення товщини пластини до її сторони $1/60$ і $1/10$ відповідно), модуль Юнга $E = 214\text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,32$, густина $\rho = 7820\text{ кг/м}^3$. Розмір кожного елемента будемо зменшувати вдвічі доки відносна різниця розрахунків у порівнянні з попередніми розрахунками не буде складати $\varepsilon \leq 1\%$. Розрахунки будемо проводити паралельно для всіх розглянутих типів елементів доки хоча б для одного з типів елементів не виконається умова $\varepsilon \leq 1\%$.

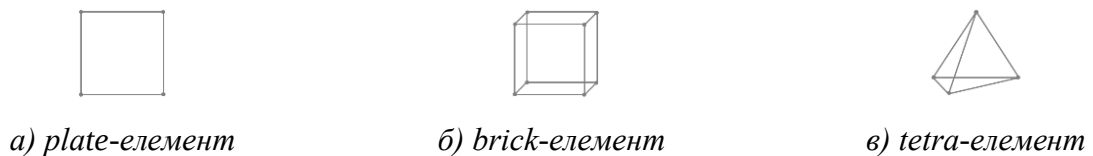


Рис. 3.1. Типи скінченних елементів

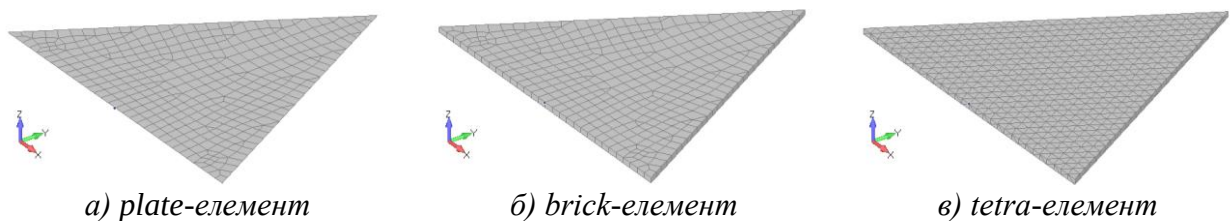


Рис. 3.2. Скінченно-елементні моделі трикутної пластини

Розраховані частоти при різних типах та розмірах елементів для трикутної пластини з відношенням $h/a = 1/60$ з вільними краями наведені в таблиці 3.1, відносні різниці розрахунків ε у відсотках наведені в таблиці 3.2, на рисунках

3.3 зображена збіжність першої і десятої частоти при різних типах елементів.

Таблиця 3.1

Частоти вільних коливань трикутної пластини $h/a = 1/60$

Form	$f, \text{Гц}$								
	Plate			Brick			Tetra		
	$4h$	$2h$	h	$4h$	$2h$	h	$4h$	$2h$	h
1	581,02	587,37	588,96	584,24	588,31	588,63	591,45	589,54	589,14
2	582,90	601,70	606,93	589,35	602,36	606,07	608,79	608,03	607,55
3	591,74	604,25	607,24	611,96	607,44	607,15	608,80	608,03	607,55
4	1378,27	1428,94	1441,45	1397,63	1430,53	1437,42	1457,34	1445,20	1443,16
5	1400,66	1433,85	1442,15	1436,85	1439,65	1439,77	1457,40	1445,21	1443,21
6	1439,76	1514,52	1538,77	1457,99	1516,62	1533,03	1554,74	1543,79	1541,93
7	1858,41	1945,85	1969,68	1893,23	1951,52	1963,83	1989,29	1976,25	1972,88
8	2507,76	2671,92	2727,98	2596,62	2674,86	2712,74	2786,61	2742,69	2736,23
9	2576,62	2696,47	2731,96	2617,46	2699,89	2717,30	2786,80	2742,86	2736,75
10	2591,73	2702,12	2733,33	2719,45	2713,93	2722,60	2793,02	2743,52	2736,79
Time	1	1	1	1	1	1	1	1	15
Elements	109	385	1560	73	385	1590	675	2700	10800
Nodes	131	419	1652	184	838	3304	1488	5673	22143

Таблиця 3.2

Відносні різниці розрахунків трикутної пластини $h/a = 1/60$

Form	$\varepsilon, \%$					
	Plate		Brick		Tetra	
	$ 1 - f_{2h}/f_{4h} $	$ 1 - f_h/f_{2h} $	$ 1 - f_{2h}/f_{4h} $	$ 1 - f_h/f_{2h} $	$ 1 - f_{2h}/f_{4h} $	$ 1 - f_h/f_{2h} $
1	1,09	0,27	0,70	0,05	0,32	0,07
2	3,23	0,87	2,21	0,62	0,12	0,08
3	2,11	0,49	0,74	0,05	0,13	0,08
4	3,68	0,88	2,35	0,48	0,83	0,14
5	2,37	0,58	0,19	0,01	0,84	0,14
6	5,19	1,60	4,02	1,08	0,70	0,12
7	4,71	1,22	3,08	0,63	0,66	0,17
8	6,55	2,10	3,01	1,42	1,58	0,24
9	4,65	1,32	3,15	0,64	1,58	0,22
10	4,26	1,16	0,20	0,32	1,77	0,25
max	6,55	2,10	4,02	1,42	1,77	0,25

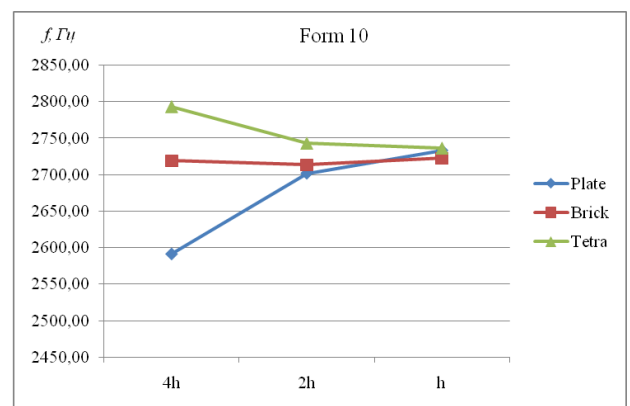
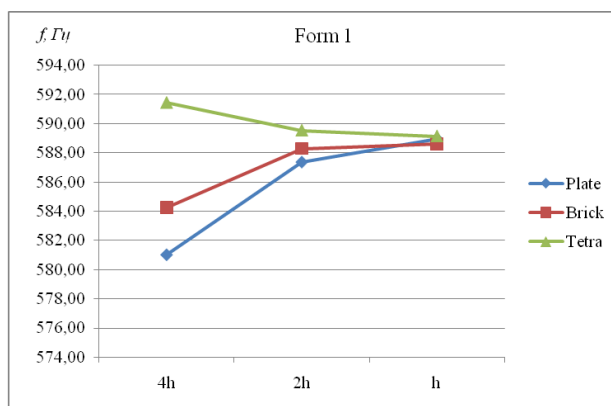


Рис. 3.3. Збіжність першої і десятої частоти при різних типах елементів для пластини $h/a = 1/60$

Представлені перша (рис. 3.4) та десята (рис. 3.5) форми коливань при різних типах та розмірах елементів пластини $h/a = 1/60$.

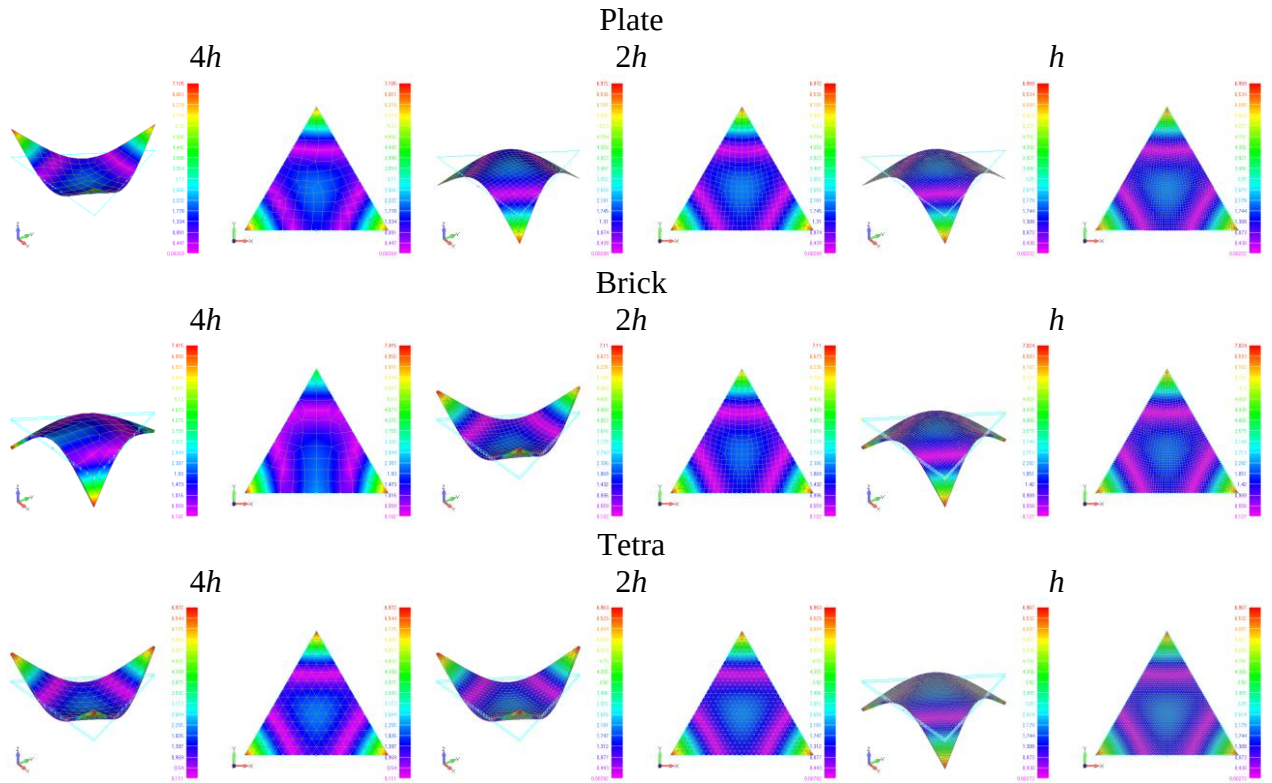


Рис. 3.4. Перша форма коливань при різних типах та розмірах елементів

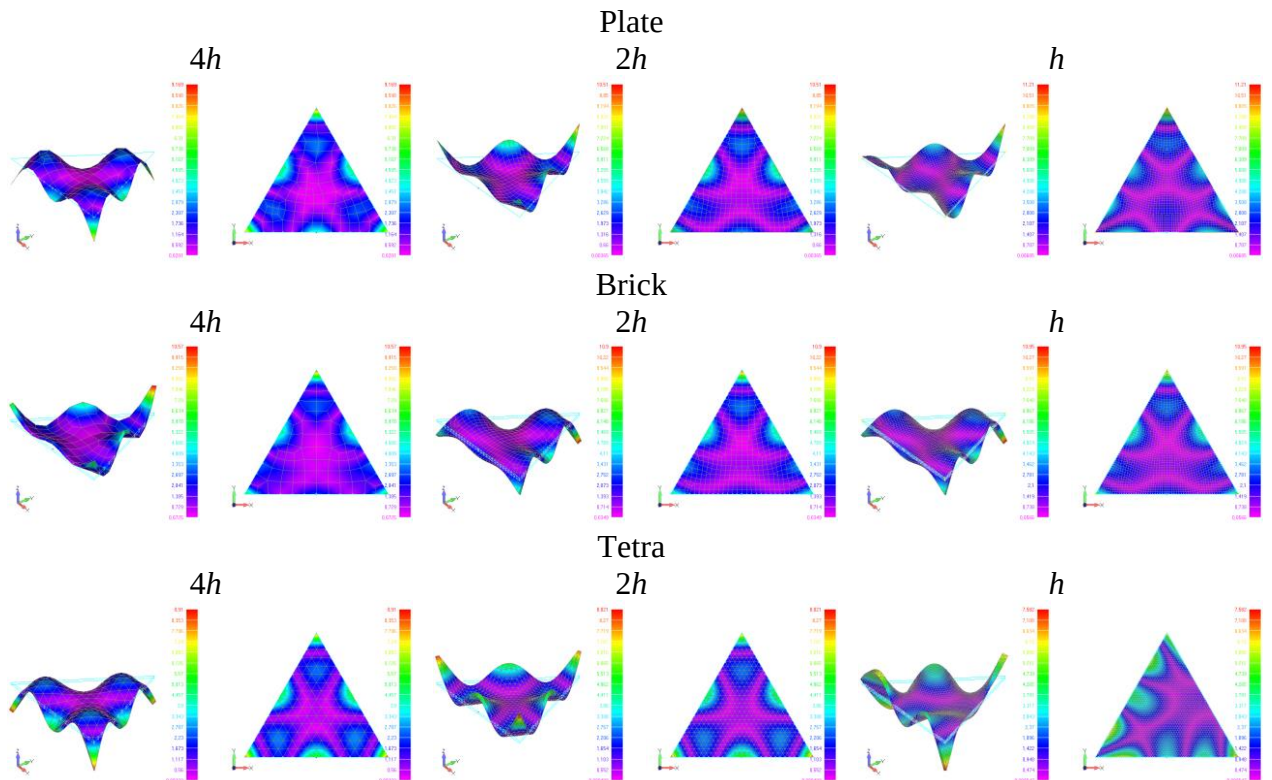


Рис. 3.5. Десята форма коливань при різних типах та розмірах елементів

В таблиці 3.1 представлені частоти вільних коливань трикутної пластини з вільними краями $h/a = 1/60$, що розбита різними скінченними елементами розмірами: $4h$, $2h$, h , в таблиці зазначена кількість елементів (Elements), кількість вузлових точок (Nodes) та відносний час (Time) комп'ютерного розрахунку. Аналізуючи дані таблиці 3.1-3.2 та рисунка 3.3 можна побачити збіжність розрахунків частоти вільних коливань для тонкої пластини при розбитті різними елементами: при розбивці plate-елементами та brick-елементами розміром $4h$ маємо менші частоти в порівнянні з частотами при розбивці такими ж елементами розміром $2h$, при розбивці tetra-елементами маємо вищі частоти для відповідних розмірів елементів, відносний час комп'ютерного розрахунку майже однаковий для всіх випадків; хороша збіжність результатів спостерігається для всіх елементів розміром h , при цьому розрахунки при розбивці tetra-елементами займають в 15 разів більше часу за рахунок великої кількості елементів, для інших розбивок час залишився незмінним, виконання умови $\varepsilon \leq 1\%$ спостерігається для розбивки tetra-елементами розміром h . При порівнянні форм коливань рис. 3.4 і 3.5 можна спостерігати однакову першу форму коливань для всіх способів розбивки та відмінність між десятими формами для розбивки plate-елементами та tetra-елементами. Всі форми мають чіткі вузлові лінії, що забезпечує можливість їх класифікувати.

Розраховані частоти при різних типах та розмірах елементів для трикутної пластини з вільними краями з відношенням $h/a = 1/10$ наведені в таблиці 3.3, відносні різниці розрахунків наведені в таблиці 3.4, на рисунках 3.6 зображена збіжність першої і десятої частоти при різних типах елементів.

Представлені перша (рис. 3.7) та десята (рис. 3.8) форми коливань при різних типах та розмірах елементів пластини $h/a = 1/10$.

Таблиця 3.3

Частоти вільних коливань трикутної пластини $h/a = 1/10$

Form	$f, \text{Гц}$								
	Plate			Brick			Tetra		
	h	$h/2$	$h/4$	h	$h/2$	$h/4$	h	$h/2$	$h/4$
1	3169,30	3366,95	3388,01	2944,14	3237,84	3315,75	3319,52	3319,58	3322,47
2	3269,77	3379,77	3439,31	3076,07	3269,55	3317,18	3320,05	3329,69	3335,13
3	3296,13	3410,33	3446,82	3169,49	3295,99	3325,15	3326,06	3330,27	3335,16
4	7196,14	7687,76	7819,53	6354,60	7289,49	7488,75	7543,62	7510,87	7525,78
5	7369,83	7728,77	7834,43	6707,78	7381,69	7505,90	7547,22	7512,14	7525,03
6	7387,87	7961,23	8203,14	6811,27	7386,98	7614,80	7614,19	7666,11	7695,37
7	9203,11	10112,40	10353,40	8474,24	9585,66	9854,76	9937,99	9897,67	9916,43
8	11845,26	13170,54	13664,88	10647,97	12166,33	12665,73	12813,72	12786,12	12835,39
9	12270,97	13368,94	13727,57	10687,98	12339,40	12727,43	12827,38	12786,51	12835,72
10	12322,31	13480,14	13816,30	11274,79	12846,77	13142,76	13360,18	13184,01	13210,04
Time	1	1	1	1	1	1	1	1	40
Elements	58	167	687	58	334	9540	300	2945	62694
Nodes	74	193	730	148	579	11564	693	5026	92877

Таблиця 3.4

Відносні різниці розрахунків трикутної пластини $h/a = 1/10$

Form	$\varepsilon, \%$					
	Plate		Brick		Tetra	
	$ 1 - f_{0,5h}/f_h $	$ 1 - f_{0,25h}/f_{0,5h} $	$ 1 - f_{0,5h}/f_h $	$ 1 - f_{0,25h}/f_{0,5h} $	$ 1 - f_{0,5h}/f_h $	$ 1 - f_{0,25h}/f_{0,5h} $
1	6,24	0,63	9,98	2,41	0,00	0,09
2	3,36	1,76	6,29	1,46	0,29	0,16
3	3,46	1,07	3,99	0,88	0,13	0,15
4	6,83	1,71	14,71	2,73	0,43	0,20
5	4,87	1,37	10,05	1,68	0,46	0,17
6	7,76	3,04	8,45	3,08	0,68	0,38
7	9,88	2,38	13,12	2,81	0,41	0,19
8	11,19	3,75	14,26	4,10	0,22	0,39
9	8,95	2,68	15,45	3,14	0,32	0,38
10	9,40	2,49	13,94	2,30	1,32	0,20
max	11,19	3,75	15,45	4,10	1,32	0,39

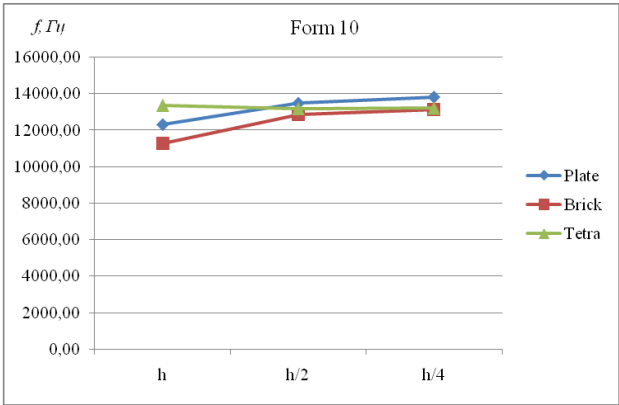
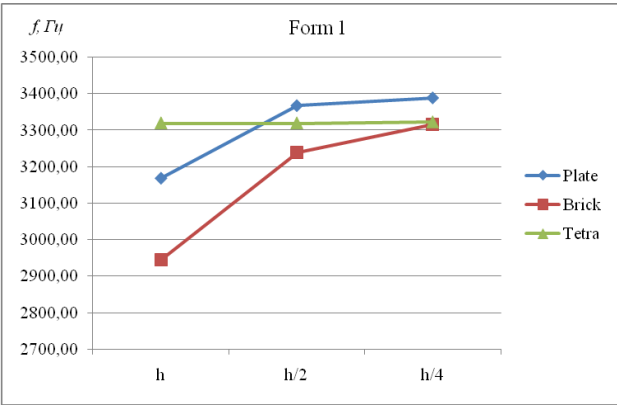


Рис. 3.6. Збіжність першої і десятої частоти при різних типах елементів для пластини $h/a = 1/10$

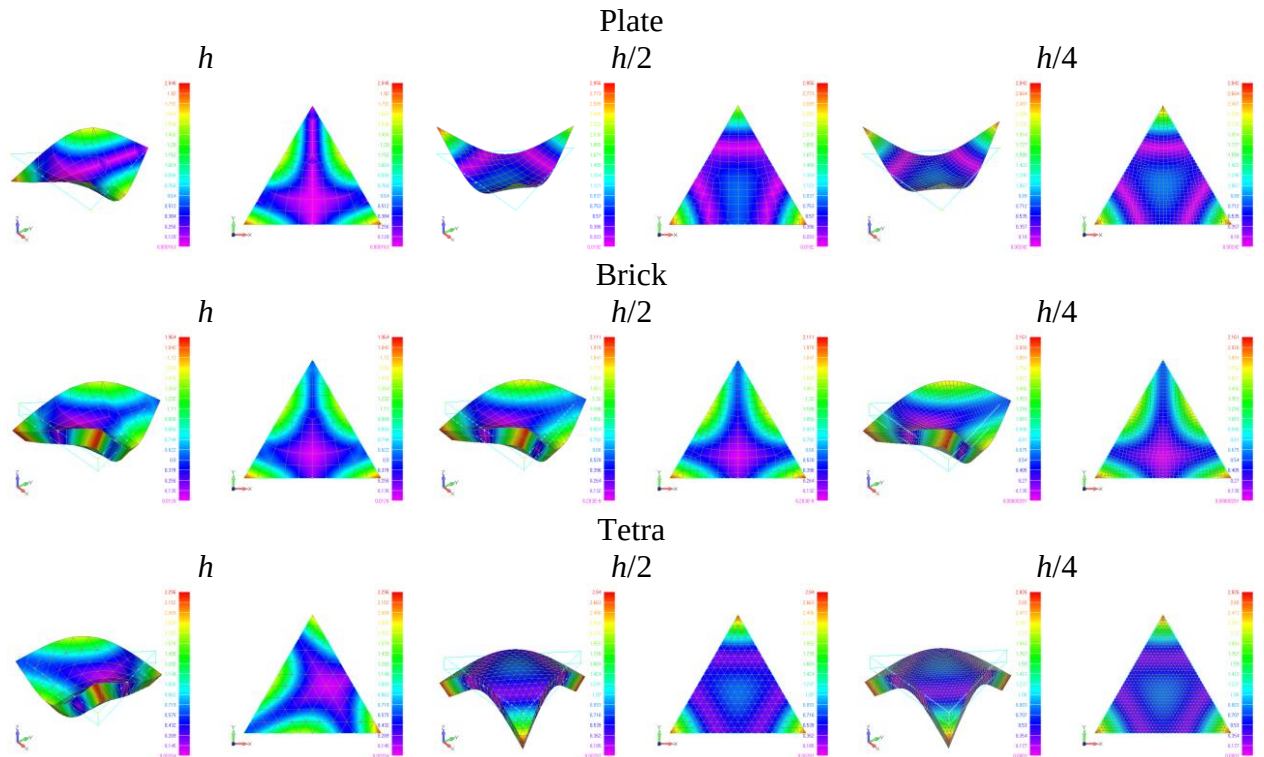


Рис. 3.7. Перша форма коливань при різних типах та розмірах елементів

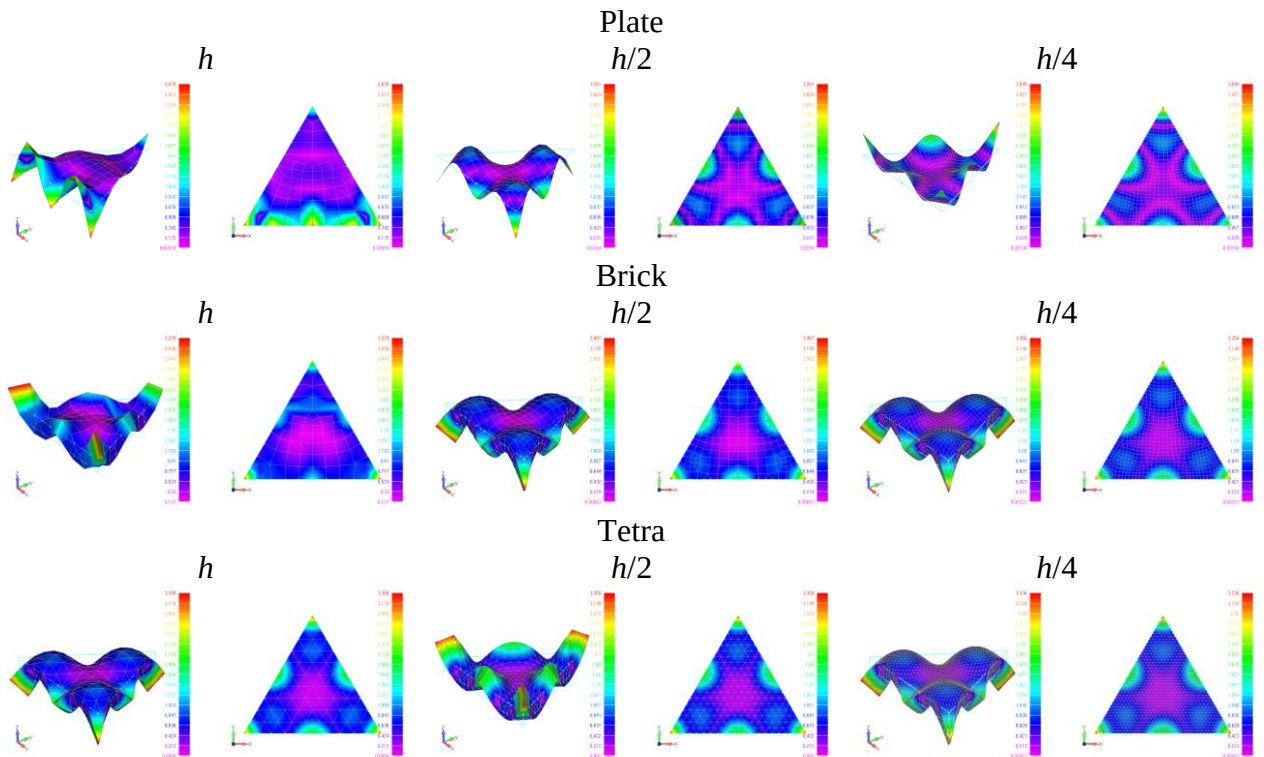


Рис. 3.8. Десята форма коливань при різних типах та розмірах елементів

В таблиці 3.3 представлені частоти вільних коливань трикутної пластини з вільними краями $h/a = 1/10$, що розбита різними скінченними елементами розмірами: h , $h/2$, $h/4$. Аналізуючи дані таблиці 3.3-3.4 та рисунка

3.6 можна побачити збіжність частот вільних коливань для нетонкої пластини при розбивці різними елементами: при розбивці plate-елементами та brick-елементами розміром h маємо менші частоти в порівнянні з частотами при розбивці такими ж елементами розміром $h/2$, при розбивці tetra-елементами маємо вищі частоти при однакових розмірах елементів, відносний час комп'ютерного розрахунку майже однаковий для всіх випадків; хороша збіжність результатів спостерігається при розбивці brick-елементами та tetra -елементами розміром $h/4$, при цьому розрахунки при розбивці tetra-елементами займають в 40 разів більше часу за рахунок великої кількості елементів, для інших розбивок час залишився незмінним, в порівнянні з цим, розраховані частоти при розбивці plate-елементами розміром $h/4$ є суттєво вищими, виконання умови $\varepsilon \leq 1\%$ спостерігається для розбивки tetra-елементами розміром $h/4$. При порівнянні форм коливань рис. 3.7 і 3.8 можна спостерігати відмінність першої форми коливань для розбивки plate-елементами та tetra-елементами різними розмірами елемента та відмінність між десятими формами для розбивки plate-елементами. Всі форми при розбивці $h/2$ і $h/4$ мають чіткі вузлові лінії, що забезпечує можливість їх класифікувати.

В подальшому будемо використовувати розбивку пластин різної товщини brick- або tetra-елементами, розмір елемента будемо підбирати залежно від товщини пластини.

3.2. Оцінка достовірності отриманих результатів розрахунку МСЕ

Використання обґрунтованої математичної моделі, коректність постановки задачі, підтвердження правильності розв'язку тестовими задачами та практична збіжність розрахованих частот забезпечують достовірність результатів отриманих МСЕ (FEM).

Розв'язування задач МСЕ в програмному середовищі FEMAP складається з декількох основних етапів та відповідних форм контролю отриманих результатів.

1. Створення геометрії розрахункової моделі – правильність та послідовність побудови геометрії досліджуваних пластин, перевірка розмірів та маси.

2. Введення фізико-механічних характеристик матеріалів – корекція характеристик згідно табличних даних.

3. Створення скінченно-елементної моделі – підбирання розміру елементів згідно критерію практичної збіжності результату. Вид скінченних елементів та їхні властивості підбирають з урахуванням складності геометрії.

4. Накладання граничних умов – порівняння результатів накладання граничних умов різними способами

5. Проведення розрахунків на визначення частот та форм вільних коливань – застосування ліцензійного програмного засобу FEMAP. Проведення розрахунків тестових задач.

Достовірність результатів, отриманих за допомогою запропонованої методики перевіряється на двох тестових задачах порівнянням власних частот коливань ізотропних квадратних пластин з вільними краями та жорстко закріпленими краями з власними частотами, отриманими методом амплітудно-флюктуаційної електронної спекл-інтерферометрії (AF-ESPI) та однією з реалізацій FEM [206].

При проведенні розрахунків використовуються різні варіанти граничних умов на краях пластини:

– жорстко закріплений край (C): $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$;

– вільний край (F): $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0, \varphi_x \neq 0, \varphi_y \neq 0, \varphi_z \neq 0$;

де $u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ – відповідно компоненти переміщень та кутів повороту для точок на краях пластини.

В якості першої тестової задачі проведемо розрахунки МСЕ частот і форм вільних коливань алюмінієвої квадратної пластини з вільними краями (FFFF) [206] з параметрами: сторона пластини $a = 0,08\text{м}$, товщина $h = 0,001\text{м}$, модуль Юнга $E = 70\text{ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$, густина

$\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$. В таблиці 3.5. представлено 26 частот вільних коливань отриманих власними розрахунками MCE та іншими авторами, а також наведена розбіжність у відсотках в порівнянні з експериментальними результатами ε_A та іншою реалізацією FEM ε_F . Для наочності зроблено порівняння результатів представлених в таблиці 3.5 у вигляді гістограми (рис. 3.9).

Таблиця 3.5

Частоти вільних коливань пластини (FFFF) визначені різними авторами

Form	f_z Гц			ε_A , %	ε_F , %	Form	f_z Гц			ε_A , %	ε_F , %
	AF-ESPI [206]	FEM [206]	MCE				AF-ESPI [206]	FEM [206]	MCE		
1	494	510	509	3,04	0,20	14	5934	6163	6122	3,17	0,67
2	735	745	744	1,22	0,13	15	6294	6458	6421	2,02	0,57
3	890	945	944	6,07	0,11	16	7400	7628	7586	2,51	0,55
4	1271	1324	1321	3,93	0,23	17	7550	7810	7758	2,75	0,67
5	2330	2357	2351	0,90	0,25	18	8104	8221	8157	0,65	0,78
6	2345	2424	2416	3,03	0,33	19	9290	9296	9225	0,70	0,76
7	2630	2634	2624	0,23	0,38	20	10560	10709	10606	0,44	0,96
8	2930	2974	2965	1,19	0,30	21	10790	11125	11014	2,08	1,00
9	3895	4021	4001	2,72	0,50	22	10920	11267	11182	2,40	0,75
10	4402	4499	4481	1,79	0,40	23	11100	11342	11462	3,26	1,06
11	4630	4731	4714	1,81	0,36	24	11160	11403	11301	1,26	0,89
12	4920	5048	5024	2,11	0,48	25	12440	12857	12733	2,36	0,96
13	5654	5827	5791	2,42	0,62	26	12780	13206	13089	2,42	0,89

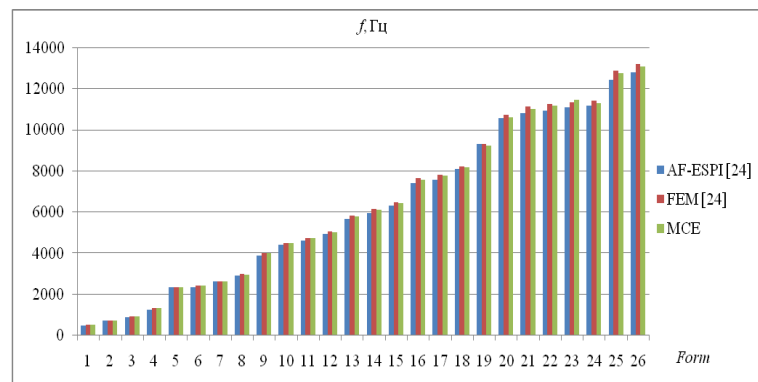


Рис. 3.9. Частоти вільних коливань пластини (FFFF) визначені різними авторами

На рис. 3.10 і 3.11 представлено для порівняння перші десять форм вільних коливань отриманих різними авторами.

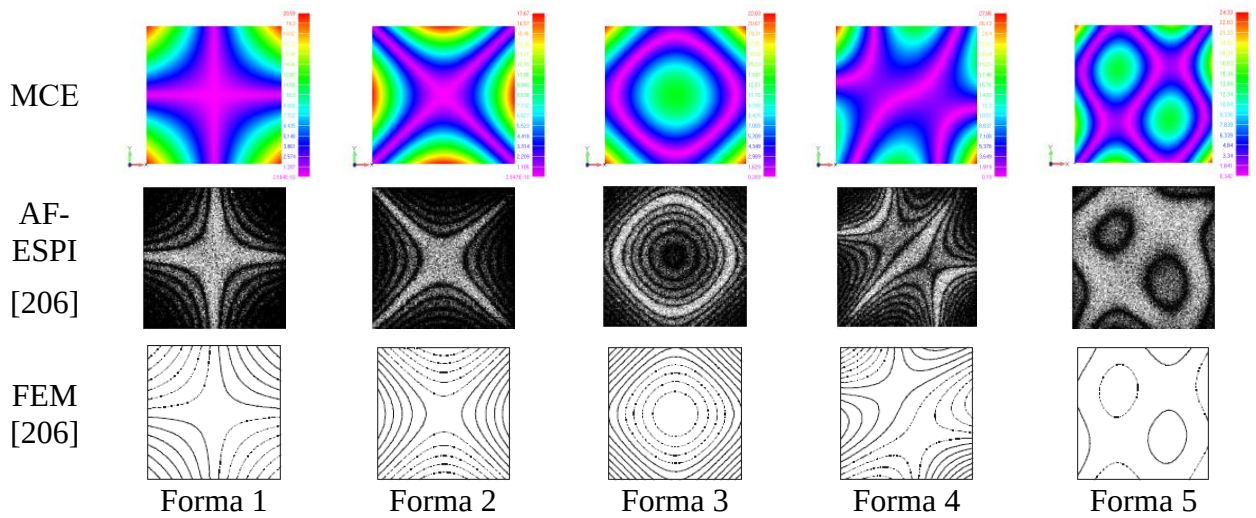


Рис. 3.10. Порівняння 1-5 форм вільних коливань пластини (FFFF)

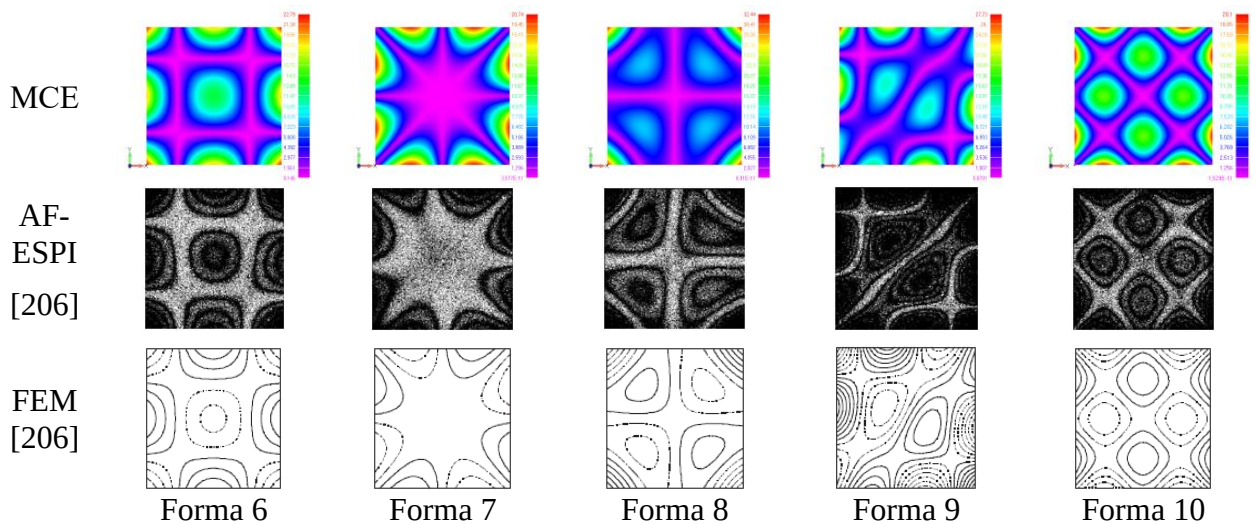


Рис. 3.11. Порівняння 6-10 форм вільних коливань пластини (FFFF)

В якості другої тестової задачі проведемо розрахунки МСЕ частот і форм вільних коливань алюмінієвої квадратної пластинки з жорстко закріпленими краями (CCCC) [206] з параметрами: сторона пластини $a = 0,09\text{м}$, товщина $h = 0,001\text{м}$, модуль Юнга $E = 70\text{ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$, густина $\rho = 2700\text{кг/м}^3$. В таблиці 3.6. представлено 12 частот вільних коливань отриманих власними розрахунками та іншими авторами. Для наочності зроблено порівнянні результатів, представлених в таблиці 3.6, у вигляді гістограми (рис. 3.12).

На рис. 3.13 і 3.14 представлено для порівняння перші десять форм вільних коливань, отриманих різними авторами.

Частоти вільних коливань пластини (CCCC) визначені різними авторами

Form	f , Гц			ε_A , %	ε_F , %	Form	f , Гц			ε_A , %	ε_F , %
	AF-ESPI [206]	FEM [206]	MCE				AF-ESPI [206]	FEM [206]	MCE		
1	1078	1099	1099	1,95	0,00	7	6198	6408	6400	3,26	0,12
2	2181	2240	2239	2,66	0,04	8	6485	6691	6675	2,93	0,24
3	3211	3300	3297	2,68	0,09	9	7085	7362	7347	3,70	0,20
4	3904	4011	4008	2,66	0,07	10	7190	7393	7378	2,61	0,20
5	3925	4030	4028	2,62	0,05	11	8553	8997	8967	4,84	0,33
6	4872	5025	5017	2,98	0,16	12	8964	9385	9367	4,50	0,19

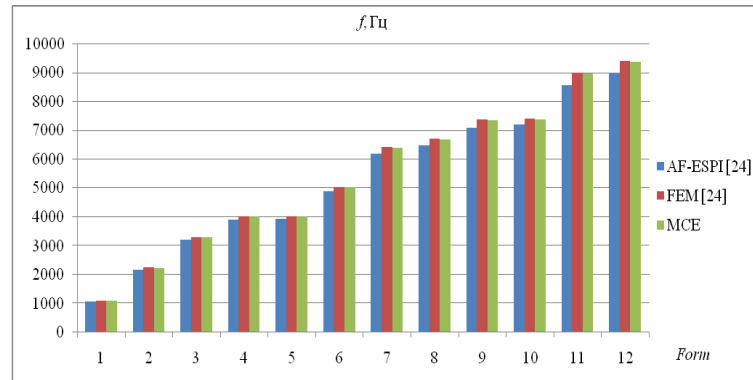


Рис. 3.12. Частоти вільних коливань пластини (CCCC) визначені різними авторами

Частоти і форми вільних коливань, отримані запропонованою реалізацією МСЕ, показують хорошу збіжність з результатами отриманими іншими авторами для обох тестових задач, що свідчить про доцільність використання запропонованого методу до розрахунків частот вільних коливань ізотропних пластин з різними граничними умовами.

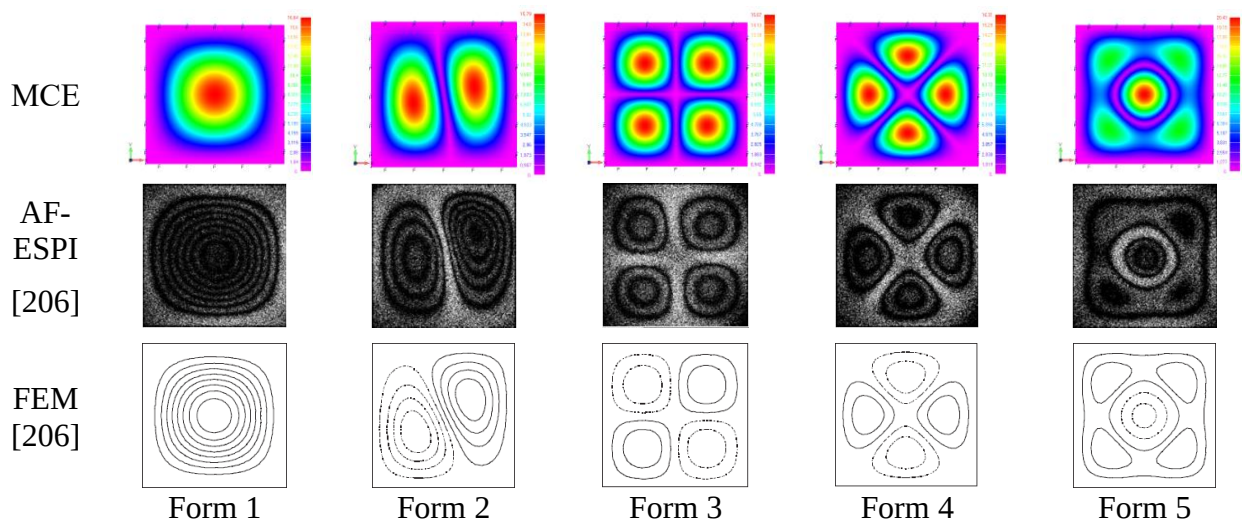


Рис. 3.13. Порівняння 1-5 форм вільних коливань пластини (CCCC)

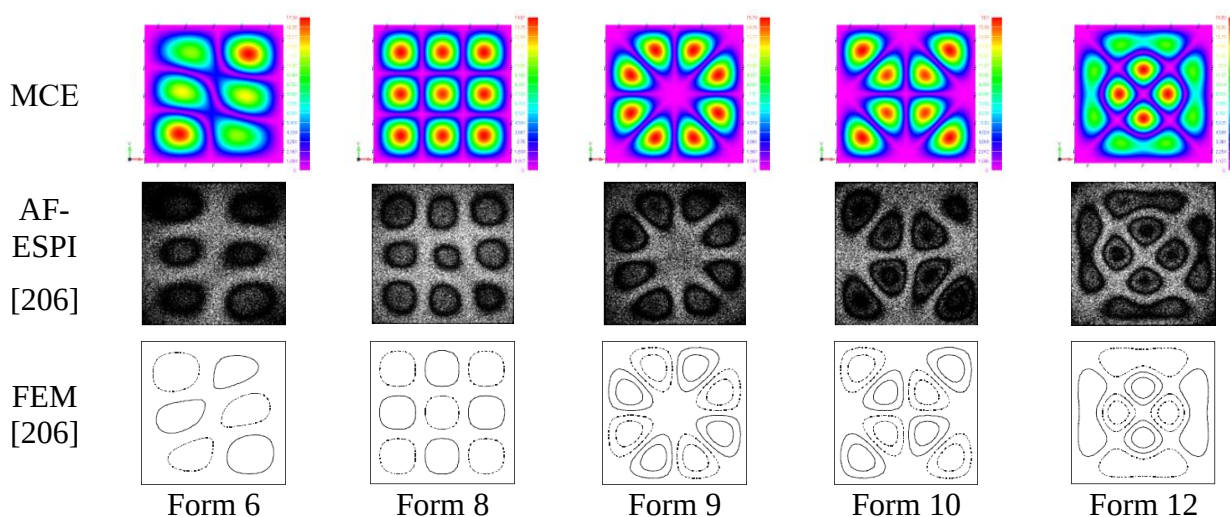


Рис. 3.14. Порівняння 6-10 форм вільних коливань пластини (CCCC)

3.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин

3.3.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин при різних граничних умовах

За допомогою FEMAP побудовано геометрію пластини у вигляді правильного трикутника [261] зі стороною $a = 240 \text{ мм}$, товщина пластини $h = 4 \text{ мм}$ ($h/a = 1/60$). В якості матеріалу пластини задавався алюміній з наступними параметрами: модуль Юнга $E = 71 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$, густина $\rho = 2710 \text{ кг/м}^3$. Пластинка досліджувалась при різних варіантах жорстко (С) закріплених країв і вільних (F) країв (рис. 3.15). Скінченно-елементна розбивка проводилась solid-елементами розміром сторони h . Розрахунок проводився на визначення частот і форм вільних коливань.

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань алюмінієвої трикутної пластини з різними варіантами жорсткого закріплення та вільних країв, які представлені в таблиці 3.7 та на гістограмі (рис. 3.16).

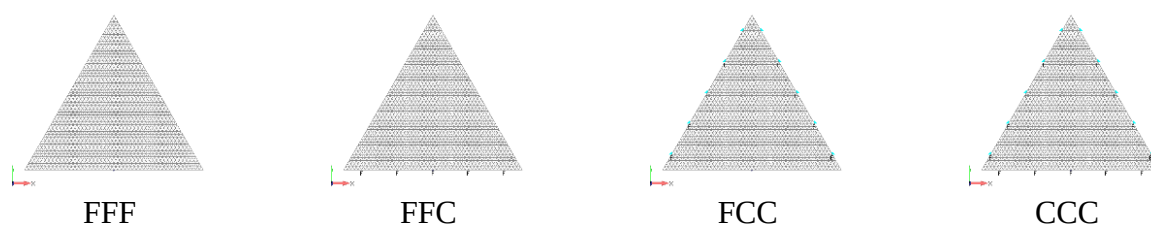


Рис. 3.15. Варіанти закріплення трикутної пластини

Таблиця 3.7

Частоти вільних коливань трикутної пластини з різними граничними умовами

Form	$f, \Gamma u$				$\frac{f_{FFC}}{f_{FFF}}$	$\frac{f_{FCC}}{f_{FFF}}$	$\frac{f_{CCC}}{f_{FFF}}$
	FFF	FFC	FCC	CCC			
1	589,22	153,51	687,94	1713,89	0,26	1,17	2,91
2	607,67	596,86	1638,99	3253,65	0,98	2,70	5,35
3	607,69	659,43	1752,11	3254,47	1,09	2,88	5,36
4	1443,54	1533,01	2946,06	5056,05	1,06	2,04	3,50
5	1443,57	1578,98	3320,10	5389,68	1,09	2,30	3,73
6	1542,35	1842,93	3379,64	5390,41	1,19	2,19	3,49
7	1973,56	2840,60	4665,67	7442,20	1,44	2,36	3,77
8	2737,38	2840,78	5087,98	7443,83	1,04	1,86	2,72
9	2737,70	3402,48	5538,94	8085,97	1,24	2,02	2,95
10	2737,77	3526,69	5563,33	8096,45	1,29	2,03	2,96

Для встановлення залежності частоти від граничних умов були введені коефіцієнти граничних умов, отримані в результаті ділення частоти закріпленої пластинки на відповідну частоту пластини з вільними краями, коефіцієнти представлені в правій частині таблиці 3.7.

Аналізуючи дані таблиці 3.7 та гістограми (рис. 3.16) можна спостерігати, що частоти трикутної пластини з вільними краями не є самими низькими в порівнянні з відповідними частотами при інших варіантах закріплення, найнижчими є перші дві частоти пластинки з жорстко закріпленням одним краєм, для всіх інших частот спостерігається зростання відповідних частот зі збільшенням кількості закріплених країв.

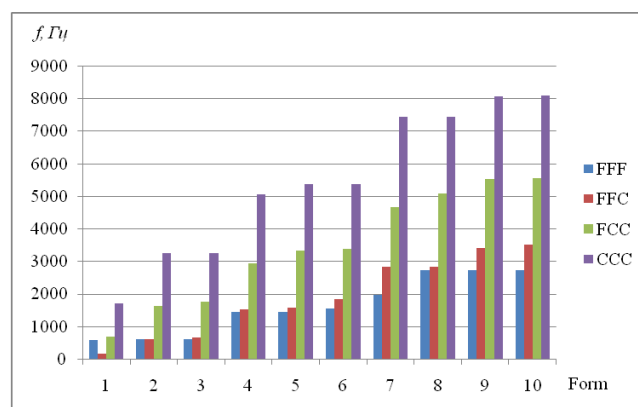


Рис. 3.16. Частоти вільних коливань трикутної пластини з різними граничними умовами

Перші десять форм коливань трикутної пластини з варіантом закріплення (FFF) представлені на рис. 3.17.

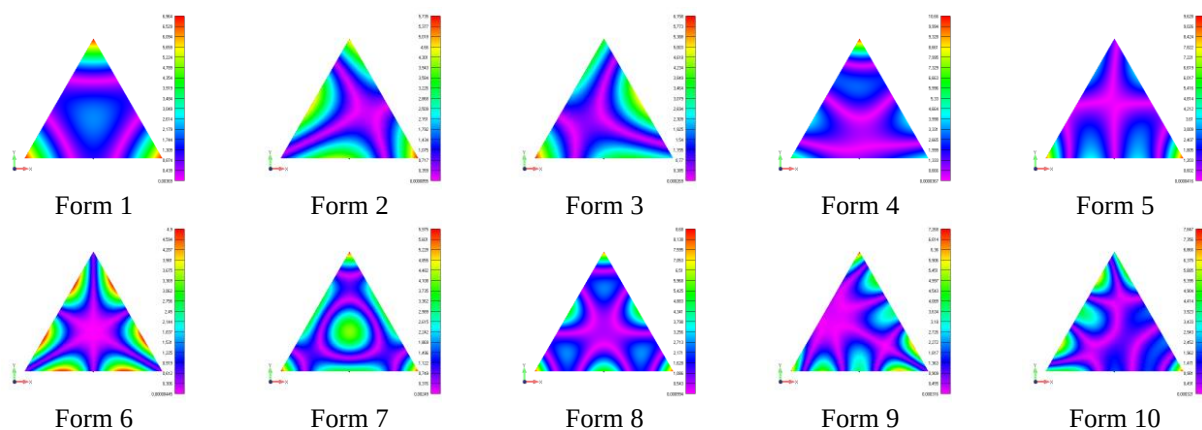


Рис. 3.17. Форми коливань трикутної пластини (FFF)

Перші десять форм коливань трикутної пластини з варіантом закріплення (FFC) представлені на рис. 3.18.

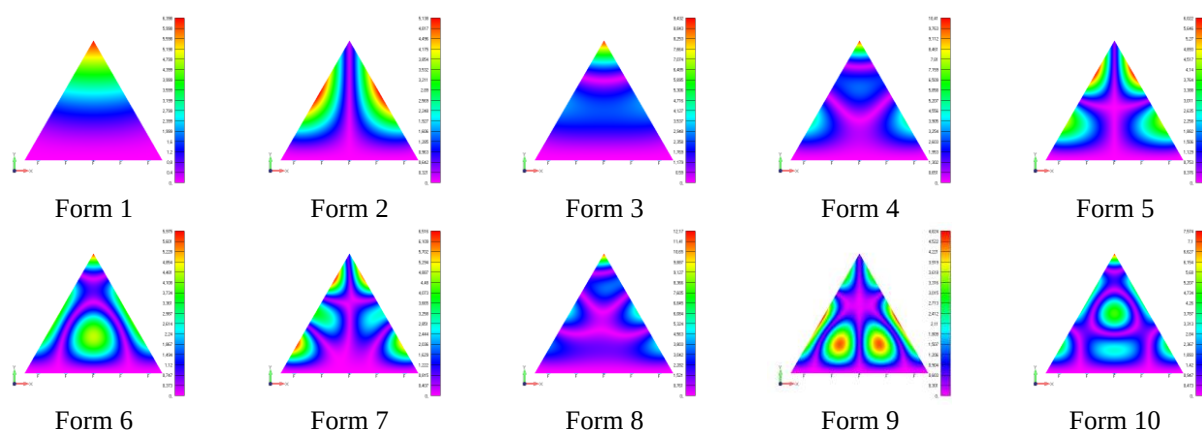


Рис. 3.18. Форми коливань трикутної пластини (FFC)

Перші десять форм коливань трикутної пластини з варіантом закріплення (FCC) представлені на рис. 3.19.

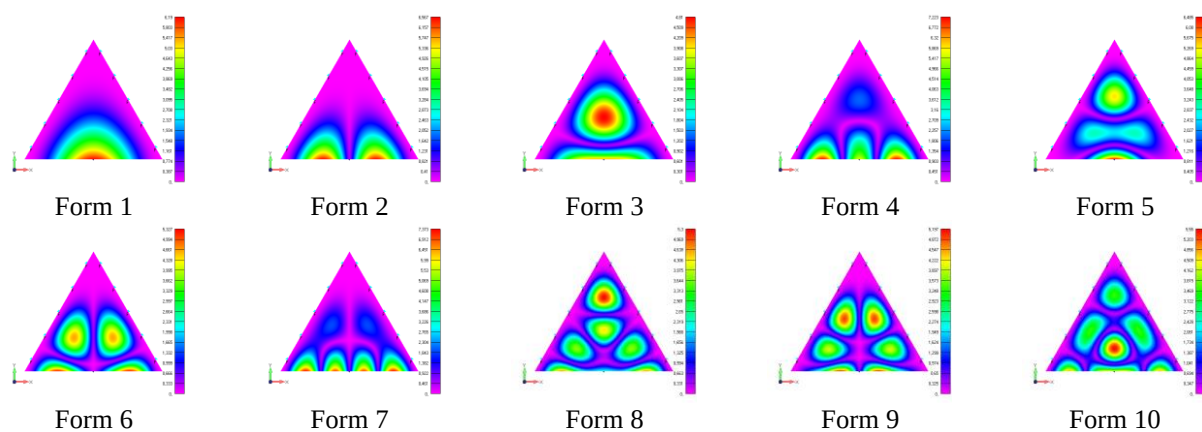


Рис. 3.19. Форми коливань трикутної пластини (FCC)

Перші десять форм коливань трикутної пластини з варіантом закріплення (CCC) представлені на рис. 3.20.

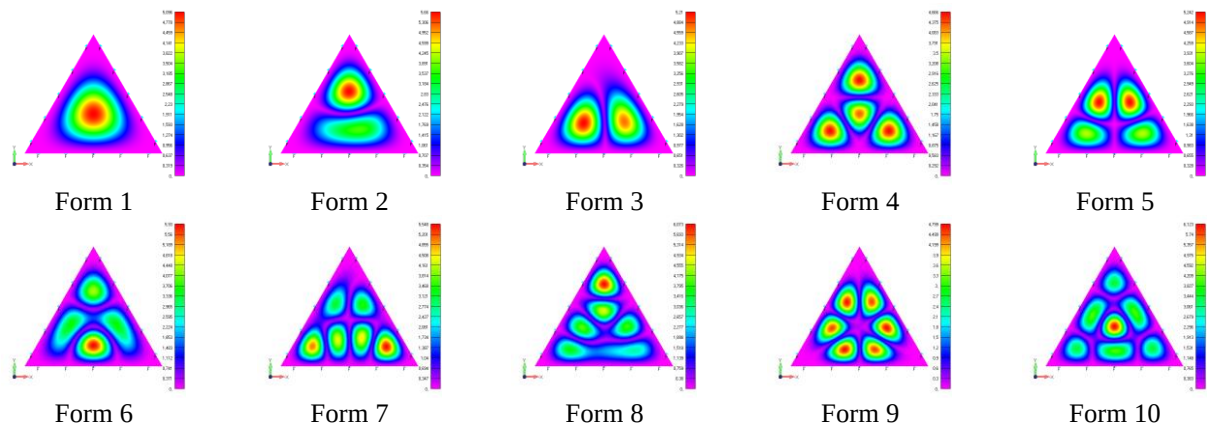


Рис. 3.20. Форми коливань трикутної пластинки (CCC)

З метою перевірки коефіцієнтів граничних умов проведено аналогічні розрахунки для двох рівносторонніх трикутних пластин різних розмірів та з різних матеріалів. Розміри першої пластини обиралися таким чином, щоб зберегти таке саме співвідношення товщини пластини до її сторони $1/60$, але з іншими розмірами ($a = 720\text{мм}$, $h = 12\text{мм}$) та з іншого матеріалу – латунь ($E = 95\text{ГПа}$, $\nu = 0,35$, $\rho = 8730\text{кг/м}^3$). Розраховані частоти вільних коливань латунної трикутної пластини з різними варіантами жорсткого закріплення та вільних країв представлені в таблиці 3.8.

Таблиця 3.8

Частоти вільних коливань латунної пластини з різними граничними умовами

Form	$f, \text{Гц}$				$\frac{f_{\text{FFC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{FCC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{CCC}}}{f_{\text{FFF}}}$
	FFF	FFC	FCC	CCC			
1	127,22	33,10	148,23	371,09	0,26	1,17	2,92
2	129,84	128,02	352,83	704,34	0,99	2,72	5,42
3	129,84	142,03	378,92	704,39	1,09	2,92	5,43
4	310,70	330,32	634,45	1093,97	1,06	2,04	3,52
5	310,72	338,87	718,04	1166,20	1,09	2,31	3,75
6	329,73	397,80	730,22	1166,24	1,21	2,21	3,54
7	425,07	610,58	1004,34	1609,82	1,44	2,36	3,79
8	587,76	611,87	1100,33	1609,85	1,04	1,87	2,74
9	587,78	734,71	1197,42	1749,03	1,25	2,04	2,98
10	589,79	760,84	1201,75	1751,04	1,29	2,04	2,97

Розміри другої пластини оберемо таким чином, щоб співвідношення товщини пластини до її сторони складало $1/20$, тобто зі стороною

$a = 1000 \text{ мм}$ та товщиною $h = 50 \text{ мм}$, в якості матеріалу задамо титан ($E = 112 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,32$, $\rho = 4506 \text{ кг/м}^3$). Розраховані частоти вільних коливань титанової трикутної пластини з різними варіантами жорсткого закріплення та вільних країв представлені в таблиці 3.9.

Таблиця 3.9

Частоти вільних коливань титанової пластини з різними граничними умовами

Form	$f, \text{Гц}$				$\frac{f_{\text{FFC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{FCC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{CCC}}}{f_{\text{FFF}}}$
	FFF	FFC	FCC	CCC			
1	404,98	106,52	467,49	1121,87	0,26	1,15	2,77
2	415,37	406,57	1083,21	2047,60	0,98	2,61	4,93
3	415,40	449,60	1150,45	2047,80	1,08	2,77	4,93
4	971,13	1024,07	1888,34	3067,44	1,05	1,94	3,16
5	971,16	1047,09	2104,83	3242,88	1,08	2,17	3,34
6	1024,20	1061,80	2135,26	3243,08	1,04	2,08	3,17
7	1308,36	1214,93	2864,67	4325,65	0,93	2,19	3,31
8	1781,12	1833,27	2883,31	4325,97	1,03	1,62	2,43
9	1781,19	1840,40	3117,70	4640,12	1,03	1,75	2,61
10	1795,43	2078,53	3354,63	4650,19	1,16	1,87	2,59

Отримані коефіцієнти для трьох різних трикутних пластин представлені в таблиці 3.10 та гістограмах (рис. 3.21), відповідні коефіцієнти для однакових співвідношень h/a є майже однакові з незначним відхиленням, для різних співвідношень розбіжність між відповідними коефіцієнтами є несуттєвою, що пояснюється впливом співвідношення на частоту вільних коливань.

Таблиця 3.10

Коефіцієнти граничних умов для трьох різних трикутних пластин

Form	Алюм.			Латунь			Титан		
	$\frac{f_{\text{FFC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{FCC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{CCC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{FFC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{FCC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{CCC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{FFC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{FCC}}}{f_{\text{FFF}}}$	$\frac{f_{\text{CCC}}}{f_{\text{FFF}}}$
1	0,26	1,17	2,91	0,26	1,17	2,92	0,26	1,15	2,77
2	0,98	2,70	5,35	0,99	2,72	5,42	0,98	2,61	4,93
3	1,09	2,88	5,36	1,09	2,92	5,43	1,08	2,77	4,93
4	1,06	2,04	3,50	1,06	2,04	3,52	1,05	1,94	3,16
5	1,09	2,30	3,73	1,09	2,31	3,75	1,08	2,17	3,34
6	1,19	2,19	3,49	1,21	2,21	3,54	1,04	2,08	3,17
7	1,44	2,36	3,77	1,44	2,36	3,79	0,93	2,19	3,31
8	1,04	1,86	2,72	1,04	1,87	2,74	1,03	1,62	2,43
9	1,24	2,02	2,95	1,25	2,04	2,98	1,03	1,75	2,61
10	1,29	2,03	2,96	1,29	2,04	2,97	1,16	1,87	2,59

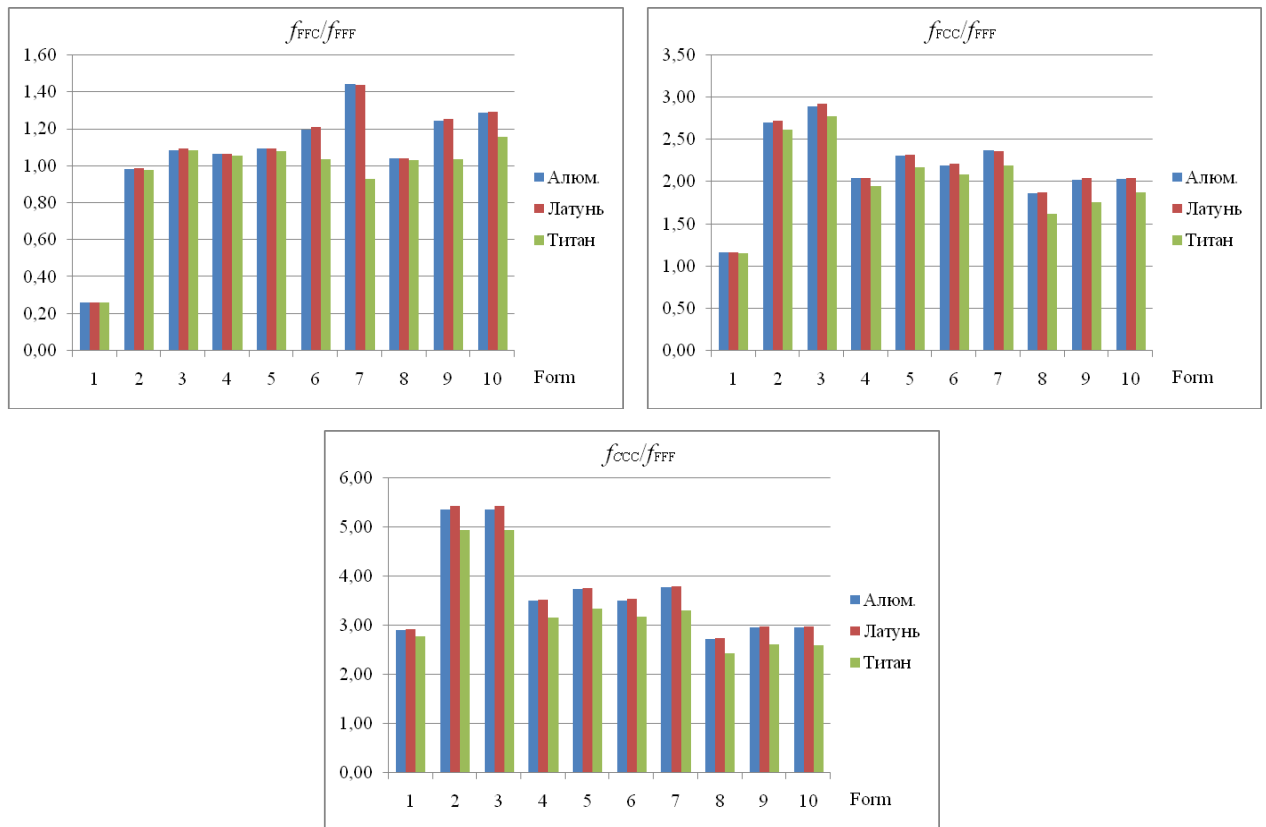


Рис. 3.21. Коефіцієнти граничних умов для трьох різних трикутних пластин

3.3.2. Розрахунок частот вільних коливань трикутних пластин при різних фізико-механічних характеристиках

Проводились розрахунки частот вільних коливань рівносторонньої трикутної пластини ($h/a = 1/60$), геометрія якої обрана відповідно геометрії пластини розглянутої в підпункті 3.3.1, з вільними краями (FFF) та жорстко закріпленими трьома краями (ССС) при інших фізико-механічних характеристиках. Матеріалами, окрім алюмінію, задавалися: сталь ($E = 214 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,32$, $\rho = 7820 \text{ кг/м}^3$), нікель ($E = 210 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,28$, $\rho = 8900 \text{ кг/м}^3$), мідь ($E = 110 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,35$, $\rho = 8920 \text{ кг/м}^3$), титан ($E = 112 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,32$, $\rho = 4506 \text{ кг/м}^3$), латунь ($E = 95 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,35$, $\rho = 8730 \text{ кг/м}^3$), срібло ($E = 80 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,37$, $\rho = 10490 \text{ кг/м}^3$), свинець ($E = 18 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,44$, $\rho = 11340 \text{ кг/м}^3$), поліетилен ($E = 2,56 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,32$, $\rho = 936 \text{ кг/м}^3$) та гума ($E = 0,003 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,49$, $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$).

Розраховані частоти для трикутної пластини (FFF) представлені в

таблиці 3.11 та у вигляді частотних кривих (рис. 3.22), для трикутної пластини (ССС) представлені в таблиці 3.12 та у вигляді частотних кривих (рис. 3.23), частоти для пластини з гуми винесені на окрему гістограму у зв'язку з їх малими значеннями.

Таблиця 3.11

Частоти вільних коливань трикутної пластини (FFF) з різних матеріалів

Form	<i>f, Гц</i>									
	Сталь	Нікель	Мідь	Титан	Латунь	Срібло	Алюм.	Свинець	Поліет.	Гума
1	600,60	552,17	406,27	572,40	381,64	321,14	589,22	145,41	189,87	5,70
2	622,62	584,60	414,62	593,38	389,48	324,35	607,67	145,41	196,84	5,70
3	622,63	584,60	414,62	593,39	389,48	324,36	607,69	149,26	196,84	6,01
4	1473,50	1363,17	992,23	1404,30	932,08	782,03	1443,54	359,94	465,83	14,40
5	1473,51	1363,18	992,24	1404,31	932,09	782,04	1443,57	359,96	465,83	14,40
6	1579,69	1481,32	1052,96	1505,50	989,12	824,26	1542,35	370,38	499,40	14,56
7	2013,86	1862,89	1357,41	1919,28	1275,12	1071,04	1973,56	496,60	636,66	20,05
8	2792,19	2577,75	1876,97	2661,06	1763,19	1472,67	2737,38	673,26	882,72	26,78
9	2797,72	2600,93	1877,00	2666,34	1763,21	1475,70	2737,70	673,28	884,47	26,78
10	2797,75	2600,95	1883,42	2666,36	1769,25	1486,23	2737,77	687,38	884,48	27,64

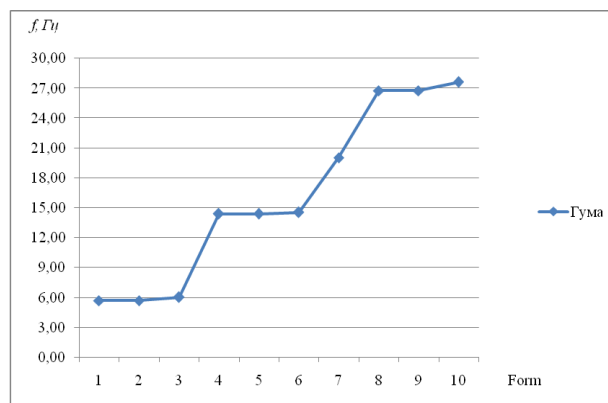
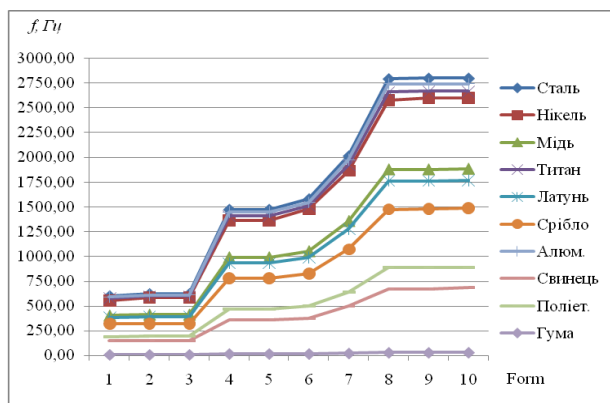


Рис. 3.22. Частоти вільних коливань трикутної пластини (FFF) з різних матеріалів

Для представлення залежності частоти вільних коливань від фізико-механічних характеристик матеріалу введемо коефіцієнти, які будуть показувати відношення частоти пластини з будь-якого ізотропного матеріалу пластини до частоти пластинки з еталонного матеріалу, наприклад, із сталі, тобто будуть визначатись як $\mu_{i.m.} = f_{i.m.} / f_{ст.}$. Частотні коефіцієнти дев'яти розглянутих ізотропних матеріалів для трикутної пластини (FFF) представлені в таблиці 3.13, для трикутної пластини (ССС) представлені в таблиці 3.14, в обох таблицях зазначено середнє значення (СЗ) коефіцієнтів.

Таблиця 3.12

Частоти вільних коливань трикутної пластини (ССС) з різних матеріалів

Form	$f, \text{Гц}$									
	Сталь	Нікель	Мідь	Титан	Латунь	Срібло	Алюм.	Свинець	Поліет.	Гума
1	1742,32	1593,97	1185,05	1660,5	1113,21	941,13	1713,89	448,57	550,82	18,76
2	3307,73	3026,89	2249,27	3152,39	2112,91	1786,01	3253,65	850,66	1045,7	35,54
3	3307,87	3026,99	2249,38	3152,52	2113,02	1786,11	3254,47	850,8	1045,75	35,58
4	5138,49	4703,34	3493,5	4897,17	3281,72	2773,59	5056,05	1320,33	1624,48	55,16
5	5478,04	5014,45	3724,15	5220,77	3498,39	2956,59	5389,68	1407,24	1731,82	58,79
6	5478,21	5014,58	3724,28	5220,94	3498,51	2956,71	5390,41	1407,29	1731,88	58,8
7	7563,27	6924,78	5140,78	7208,08	4829,14	4080,69	7442,2	1941,19	2391,05	81,05
8	7563,39	6924,88	5140,93	7208,2	4829,28	4080,86	7443,83	1941,53	2391,09	81,15
9	8218,04	7525,05	5585,37	7832,1	5246,77	4433,34	8085,97	2108,52	2598,04	88,07
10	8227,42	7533,59	5591,78	7841,04	5252,8	4438,45	8096,45	2110,96	2601,01	88,17

Таблиця 3.13

Частотні коефіцієнти ізотропних матеріалів для трикутної пластини (FFF)

Form	$\mu_{i.m.}$								
	Нікель	Мідь	Титан	Латунь	Срібло	Алюм.	Свинець	Поліет.	Гума
1	0,92	0,68	0,95	0,64	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01
2	0,94	0,67	0,95	0,63	0,52	0,98	0,23	0,32	0,01
3	0,94	0,67	0,95	0,63	0,52	0,98	0,24	0,32	0,01
4	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01
5	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01
6	0,94	0,67	0,95	0,63	0,52	0,98	0,23	0,32	0,01
7	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,25	0,32	0,01
8	0,92	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01
9	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01
10	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,25	0,32	0,01
C3	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01

Подібність частотних коефіцієнти ізотропних матеріалів для кожної форми коливань пластин для обох способів закріплення встановлює залежність частоти коливань від фізико-механічних характеристик матеріалу через СЗ коефіцієнтів і є справедливою для інших граничних умов.

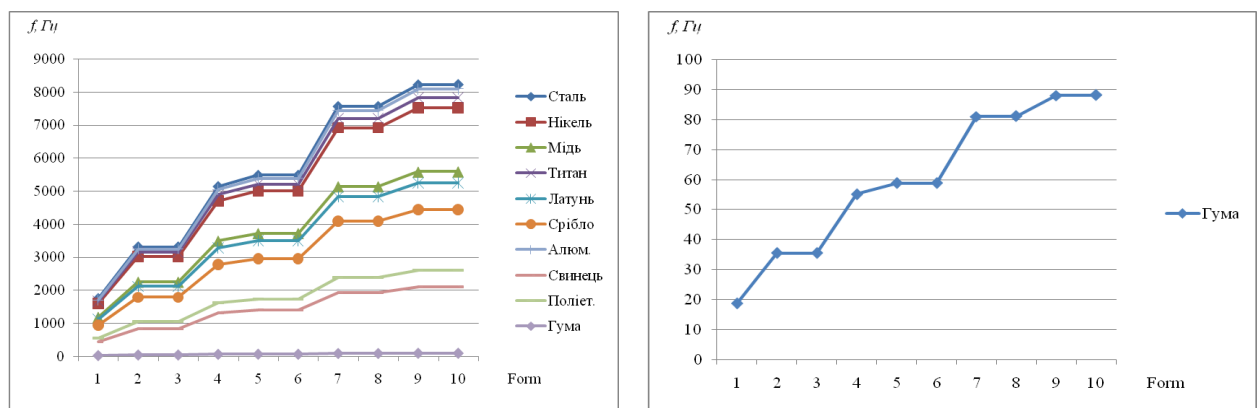


Рис. 3.23. Частоти вільних коливань трикутної пластини (ССС) з різних матеріалів

Частотні коефіцієнти ізотропних матеріалів для трикутної пластини (ССС)

Form	$\mu_{i.m.}$								
	Нікель	Мідь	Титан	Латунь	Срібло	Алюм.	Свинець	Поліет.	Гума
1	0,91	0,68	0,95	0,64	0,54	0,98	0,26	0,32	0,01
2	0,92	0,68	0,95	0,64	0,54	0,98	0,26	0,32	0,01
3	0,92	0,68	0,95	0,64	0,54	0,98	0,26	0,32	0,01
4	0,92	0,68	0,95	0,64	0,54	0,98	0,26	0,32	0,01
5	0,92	0,68	0,95	0,64	0,54	0,98	0,26	0,32	0,01
6	0,92	0,68	0,95	0,64	0,54	0,98	0,26	0,32	0,01
7	0,92	0,68	0,95	0,64	0,54	0,98	0,26	0,32	0,01
8	0,92	0,68	0,95	0,64	0,54	0,98	0,26	0,32	0,01
9	0,92	0,68	0,95	0,64	0,54	0,98	0,26	0,32	0,01
10	0,92	0,68	0,95	0,64	0,54	0,98	0,26	0,32	0,01
СЗ	0,92	0,68	0,95	0,64	0,54	0,98	0,26	0,32	0,01

3.3.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин різної товщини

Проводились розрахунки частот вільних коливань алюмінієвих рівносторонніх трикутних пластин при різних варіантах жорстко (С) закріплених країв і вільних (F) країв (рис. 3.15) з параметрами: сторона пластини $a = 0,24\text{ м}$, співвідношенням товщини пластини до її сторони h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/8, 1/6, 1/5.

Розраховані частоти для пластини з вільними краями (FFF) представлені в таблиці 3.15. Для представлення залежності частоти вільних коливань від співвідношення товщини пластини до її сторони h/a введемо коефіцієнти, які будуть показувати в скільки разів збільшилась частота пластини при збільшені її товщини, тобто $g_{1/n} = f_{1/n} / f_{1/m} \ (n < m)$.

Таблиця 3.15

Частоти вільних коливань трикутних пластин (FFF) різної товщини

Form	$f, \text{Гц}$										
	1/240	1/120	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5
1	147,79	295,39	589,22	1169,26	1736,35	2286,27	2815,88	3323,03	4019,21	5008,47	5678,37
2	152,92	305,34	607,67	1199,48	1772,03	2320,76	2842,68	3336,17	4019,24	5008,58	5678,48
3	152,92	305,35	607,69	1199,51	1772,05	2320,77	2842,69	3336,17	4037,66	5103,36	5849,28
4	363,37	725,82	1443,54	2836,91	4157,11	5384,56	6509,06	7528,27	8862,15	10406,52	11166,59
5	363,37	725,82	1443,57	2836,94	4157,16	5384,59	6509,11	7528,35	8862,26	10622,75	11687,35
6	390,15	778,17	1542,35	3007,29	4370,82	5611,87	6721,27	7700,02	8927,23	10623,17	11687,85
7	498,44	994,75	1973,56	3852,32	5603,08	7200,69	8637,85	9920,08	11572,89	13736,18	15071,14
8	691,25	1380,39	2737,38	5299,38	7614,85	9642,62	11378,94	12843,43	14577,60	16462,60	17257,39
9	693,35	1383,30	2737,70	5299,75	7615,21	9642,84	11379,05	12843,48	14578,22	16463,54	17258,37
10	693,35	1383,31	2737,77	5323,10	7688,16	9791,03	11627,27	13215,24	15184,68	17612,80	19007,20

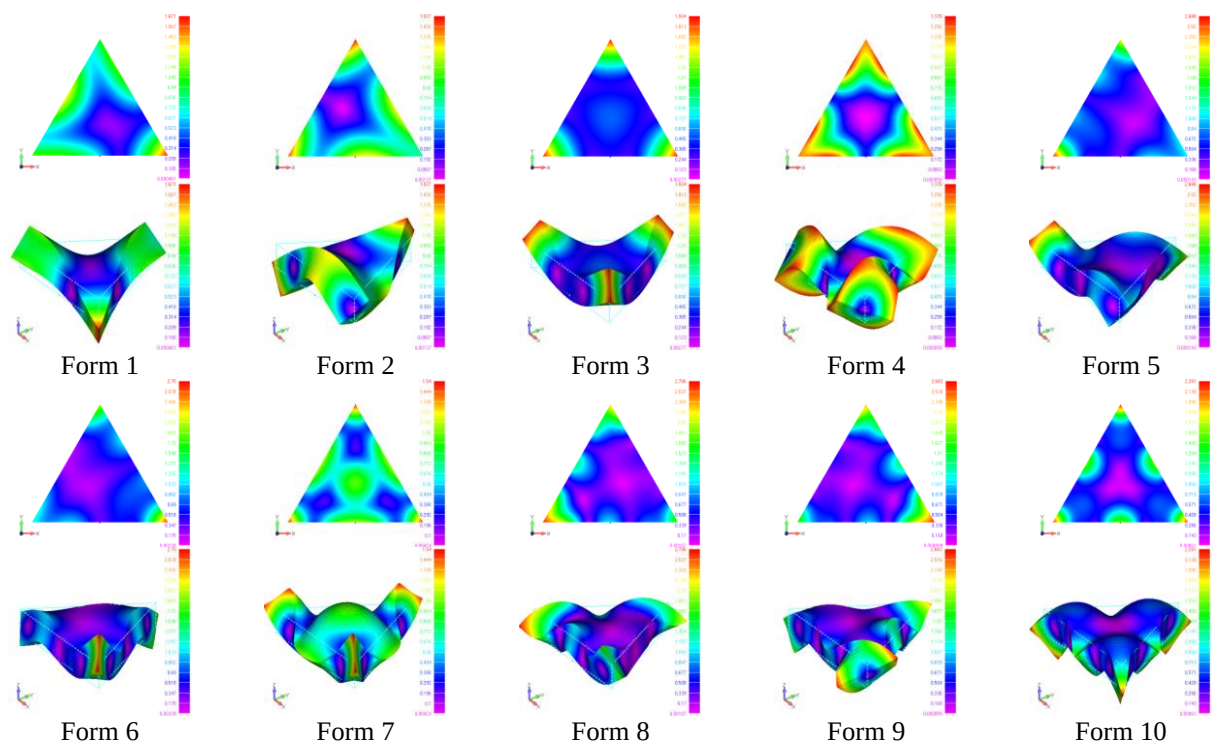
Частотні коефіцієнти трикутних пластин (FFF) різної товщини наведені в таблиці 3.16, де зазначено середнє значення (СЗ) коефіцієнтів.

Таблиця 3.16

Частотні коефіцієнти трикутних пластин (FFF) різної товщини

Form	$f, \Gamma y$									
	$g_{1/120}$	$g_{1/60}$	$g_{1/30}$	$g_{1/20}$	$g_{1/15}$	$g_{1/12}$	$g_{1/10}$	$g_{1/8}$	$g_{1/6}$	$g_{1/5}$
1	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
2	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
3	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,3	1,1
4	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
5	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
6	2,0	2,0	1,9	1,5	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,1
7	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,1
8	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,0
9	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,0
10	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,2	1,1
СЗ	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1

Перші десять форм коливань тонкої трикутної пластини з вільними краями (FFF) при $h/a=1/60$ наведено на рис. 3.17. Зауважимо, що форми поперечних коливань є однаковими для всіх розглянутих товщин пластин. Для порівняння на рис. 3.24 наведені, в двох напрямках спостереження, десять форм коливань пластини (FFF) при $h/a=1/5$, для якої порядок формоутворення порушується в порівнянні з пластиною при $h/a=1/60$.

Рис. 3.24. Форми коливань трикутної пластини (FFF) при $h/a=1/5$

При збільшенні товщини пластини в діапазоні перших десяти частот серед поперечних форм коливань виявлено планарні форми ($\text{Form}_{(P)}$) коливань пластини (рис. 3.25), які важко встановити експериментально. Багато теоретичних моделей не враховують наявності цих форм коливань, оскільки працюють тільки для тонких пласти. Для пластини із співвідношенням $h/a=1/5$ в діапазоні перших десяти частот було встановлено шість планарні форми коливань, що є новим результатом та спонукало до пошуку перших десяти планарних форм коливань та розширення спектру досліджуваних частот до 23 частот для пластин зі співвідношенням $h/a=1/5$ та 236 частот для пластин зі співвідношенням $h/a=1/240$. Перші десять частот планарних коливань трикутних пластин з вільними краями (FFF) зі співвідношеннями $h/a=1/240$ і $h/a=1/5$ представлені в таблиці 3.17, де ε – відхилення між частотами у відсотках. Перші десять форм планарних коливань трикутної пластини (FFF) зі співвідношенням $h/a=1/5$ представлені на рис. 3.25. Планарні форми коливань наявні для всіх розглянутих співвідношень h/a , проте, вони є більш характерними для нетонких пластин, а їх кількість та частота появи збільшується зі збільшенням співвідношення h/a .

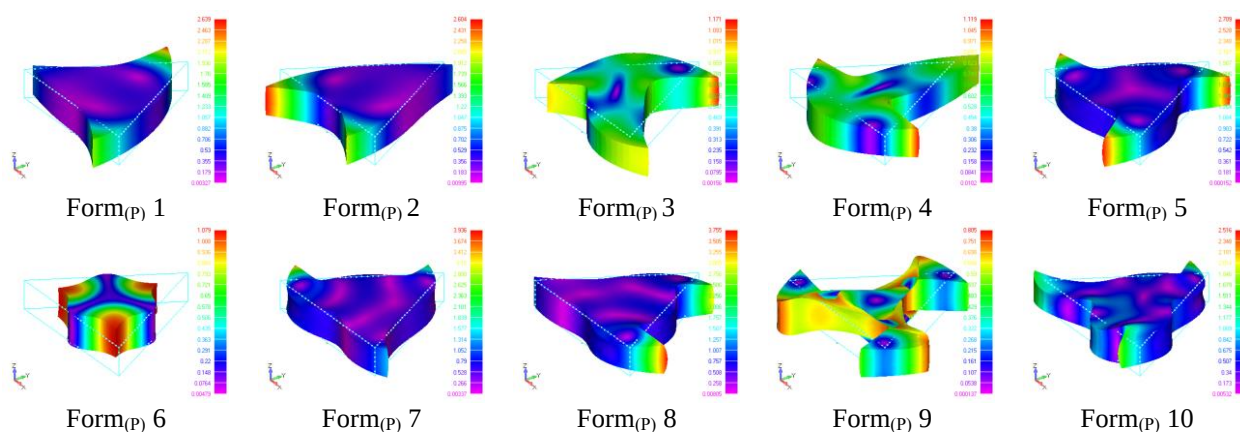


Рис. 3.25. Форми планарних коливань трикутної пластини (FFF) при $h/a=1/5$

Розраховані частоти для пластини з одним жорстко закріпленим краєм та двома вільними краями (FFC) представлені в таблиці 3.18. Частотні коефіцієнти трикутних пластин (FFC) різної товщини наведені в таблиці 3.19.

Таблиця 3.17

Частоти планарних коливань трикутних пластин (FFF) різної товщини

Form(p)	1/240	1/5	ε , %	Form(p)	1/240	1/5	ε , %
1	8849,43	8833,68	0,18	6	15178,26	15093,34	0,56
2	8849,43	8833,74	0,18	7	19353,59	19268,10	0,44
3	13034,69	13025,27	0,07	8	19353,61	19269,03	0,44
4	13034,69	13025,42	0,07	9	23467,00	23448,22	0,08
5	14235,63	14182,99	0,37	10	24747,09	24615,72	0,53

Таблиця 3.18

Частоти вільних коливань трикутних пластин (FFC) різної товщини

Form	$f, \text{Гц}$										
	1/240	1/120	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5
1	38,41	76,87	153,53	305,62	456,34	604,90	751,30	894,85	1104,86	1437,87	1687,58
2	149,90	299,77	596,95	1177,70	1737,03	2267,18	2764,75	3226,44	3849,07	4703,18	5237,44
3	165,47	331,01	659,55	1302,78	1924,75	2517,08	3076,89	3599,78	4314,60	5321,40	5976,83
4	385,66	771,27	1533,35	3003,55	4383,87	5647,62	6788,10	7803,81	9060,49	10565,93	11397,66
5	398,25	795,85	1579,34	3080,19	4474,12	5733,40	6852,36	7832,29	9110,08	10797,17	11811,14
6	464,59	928,60	1843,31	3592,05	5206,42	6652,44	7928,23	9037,38	10426,58	12154,77	13163,66
7	717,80	1434,79	2841,32	5479,60	7837,55	9866,72	11576,40	12996,70	14659,59	16468,43	17276,84
8	718,91	1436,19	2841,55	5491,85	7875,29	9941,81	11702,69	13184,19	14969,65	17081,37	18243,14
9	861,81	1721,41	3403,23	6536,09	9289,66	11615,84	13548,32	15134,62	16992,86	19070,72	20091,85
10	893,73	1785,12	3527,62	6768,50	9618,81	12028,64	14035,06	15689,90	17646,92	19918,75	21162,19

Таблиця 3.19

Частотні коефіцієнти трикутних пластин (FFC) різної товщини

Form	$f, \text{Гц}$									
	$g_{1/120}$	$g_{1/60}$	$g_{1/30}$	$g_{1/20}$	$g_{1/15}$	$g_{1/12}$	$g_{1/10}$	$g_{1/8}$	$g_{1/6}$	$g_{1/5}$
1	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,3	1,2
2	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
3	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
4	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,1
5	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,1
6	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,1
7	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,0
8	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
9	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
10	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
C3	2,0	2,0	1,9	1,5	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,1

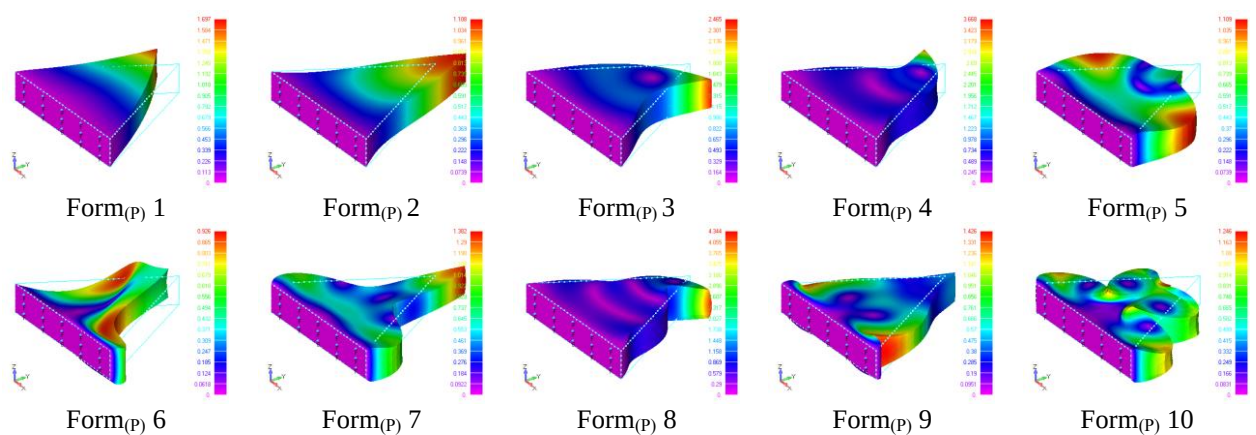
Перші десять частот планарних коливань трикутних пластин з жорстко закріпленим одним краєм (FFC) зі співвідношеннями $h/a=1/240$ і $h/a=1/5$ представлені в таблиці 3.17, де ε – відхилення між частотами у відсотках. Пошук перших десяти планарних форм коливань для пластин зі співвідношенням $h/a=1/5$ відбувався в діапазоні частот від 2 до 25 частоти та для пластин зі співвідношенням $h/a=1/240$ в діапазоні частот від 42 до 236

частоти. Перші десять форм планарних коливань трикутної пластини (FFC) зі співвідношенням $h/a=1/5$ представлені на рис. 3.26.

Таблиця 3.20

Частоти планарних коливань трикутних пластин (FFC) різної товщини

Form(p)	1/240	1/5	ε , %	Form(p)	1/240	1/5	ε , %
1	4534,88	4548,54	0,30	6	19133,23	19172,41	0,20
2	8885,71	8921,54	0,40	7	20068,45	20014,94	0,27
3	9053,16	9048,42	0,05	8	21659,62	21577,52	0,38
4	15188,11	15155,96	0,21	9	22356,40	22245,03	0,50
5	18320,13	18316,69	0,02	10	27173,02	27098,95	0,27

Рис. 3.26. Форми планарних коливань трикутної пластинки (FFC) при $h/a=1/5$

Розраховані частоти для пластини з двома жорстко закріпленими краями та одним вільними краєм (FCC) представлені в таблиці 3.21. Частотні коефіцієнти трикутних пластин (FCC) різної товщини наведені в таблиці 3.22.

Таблиця 3.21

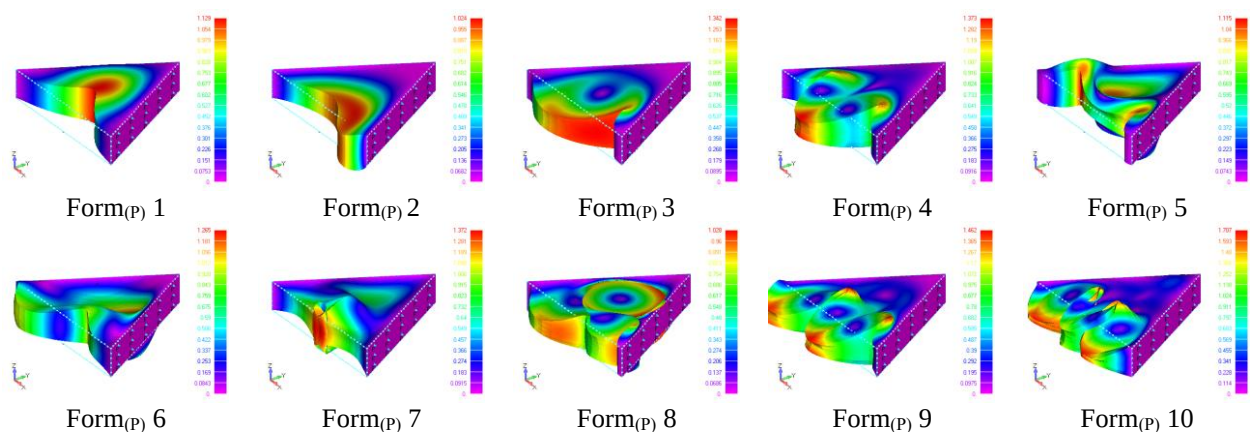
Частоти вільних коливань трикутних пластин (FCC) різної товщини

Form	f , Гц										
	1/240	1/120	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5
1	172,42	345,33	688,11	1357,20	2000,72	2607,59	3175,84	3699,32	4403,95	5373,45	5985,86
2	412,48	825,65	1639,49	3194,96	4632,38	5918,33	7053,39	8035,03	9257,41	10754,07	11592,63
3	440,83	882,46	1752,74	3411,96	4931,15	6273,92	7443,57	8437,89	9660,40	11126,18	11930,59
4	744,57	1489,72	2947,11	5668,07	8074,82	10116,11	11822,14	13223,00	14875,16	16768,11	17783,48
5	839,38	1679,29	3321,49	6368,25	9016,12	11225,40	13042,11	14512,71	16232,64	18164,44	19136,99
6	855,13	1710,50	3380,69	6468,77	9146,15	11363,51	13172,06	14623,63	16297,58	18185,01	19222,27
7	1185,86	2371,20	4667,59	8827,90	12324,25	15121,80	17335,38	19068,76	21017,71	23130,15	24204,80
8	1292,38	2584,41	5089,69	9608,24	13352,57	16317,53	18643,03	20448,71	22468,98	24610,93	25624,69
9	1410,42	2819,19	5541,51	10401,42	14366,70	17449,44	19831,92	21660,93	23686,40	25816,84	26807,54
10	1416,52	2831,39	5565,02	10448,93	14443,70	17561,02	19978,68	21842,94	23920,43	26138,59	27201,85

Частотні коефіцієнти трикутних пластин (FCC) різної товщини

Form	$f, \Gamma u$									
	$g_{1/120}$	$g_{1/60}$	$g_{1/30}$	$g_{1/20}$	$g_{1/15}$	$g_{1/12}$	$g_{1/10}$	$g_{1/8}$	$g_{1/6}$	$g_{1/5}$
1	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
2	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,1
3	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,2	1,1
4	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
5	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
6	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
7	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0
8	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0
9	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0
10	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0
C3	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1

Перші десять частот планарних коливань трикутних пластин (FCC) зі співвідношеннями $h/a=1/240$ і $h/a=1/5$ представлені в таблиці 3.23, де ε – відхилення між частотами у відсотках. Пошук перших десяти планарних форм коливань для пластин зі співвідношенням $h/a=1/5$ відбувався в діапазоні частот від 4 до 25 частоти та для пластин зі співвідношенням $h/a=1/240$ в діапазоні частот від 90 до 278 частоти. Перші десять форм планарних коливань трикутної пластини (FCC) зі співвідношенням $h/a=1/5$ представлені на рис. 3.27.

Рис. 3.27. Форми планарних коливань трикутної пластинки (FCC) при $h/a=1/5$

Розраховані частоти для пластини з трьома жорстко закріпленими краями (ССС) представлені в таблиці 3.24. Частотні коефіцієнти трикутних пластин (ССС) різної товщини наведені в таблиці 3.25.

Таблиця 3.23

Частоти планарних коливань трикутних пластин (FCC) різної товщини

Form(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$	Form(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$
1	12248,22	12302,95	0,45	6	25591,88	25621,43	0,12
2	14558,82	14632,94	0,51	7	27142,49	26950,23	0,71
3	17413,85	17429,52	0,09	8	28465,17	28438,34	0,09
4	23062,11	23045,96	0,07	9	29656,89	29574,44	0,28
5	25382,84	25373,98	0,03	10	35397,38	35168,44	0,65

Таблиця 3.24

Частоти вільних коливань трикутних пластин (ССС) різної товщини

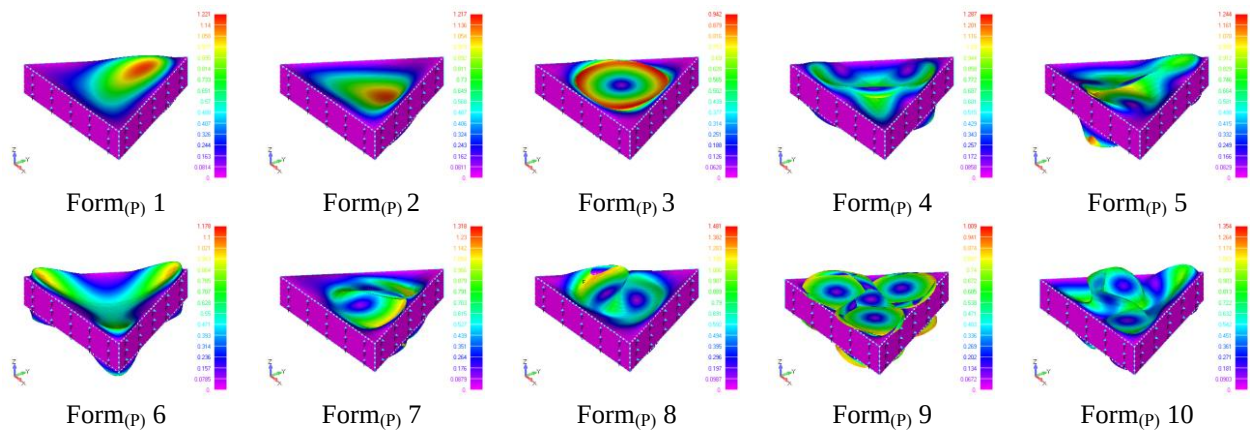
Form	$f, \Gamma y$										
	1/240	1/120	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5
1	430,44	862,93	1714,71	3333,24	4808,54	6098,77	7214,05	8152,81	9300,97	10670,47	11421,79
2	821,63	1646,11	3255,58	6219,63	8768,63	10855,30	12543,73	13880,63	15415,98	17112,89	17988,55
3	821,64	1646,14	3255,76	6220,85	8771,32	10856,36	12544,41	13881,41	15418,48	17116,57	17989,18
4	1283,57	2570,10	5058,42	9501,44	13128,95	15942,91	18121,27	19786,57	21645,34	23651,56	24683,53
5	1370,20	2743,09	5392,73	10089,85	13880,59	16778,52	18995,50	20672,01	22524,17	24508,98	25526,89
6	1370,22	2743,18	5393,04	10091,35	13882,68	16780,59	18996,53	20672,67	22527,05	24510,69	25529,00
7	1903,13	3807,88	7447,32	13697,11	18503,93	22023,02	24630,79	26553,72	28639,81	30809,53	31856,46
8	1903,16	3807,98	7447,43	13697,91	18507,85	22026,79	24632,12	26556,86	28641,80	30813,37	31857,08
9	2072,72	4145,68	8091,66	14791,59	19848,50	23488,63	26144,78	28087,47	30189,87	32401,06	33520,16
10	2074,83	4150,25	8101,38	14813,48	19895,99	23555,76	26241,54	28211,90	30345,99	32589,41	33729,05

Таблиця 3.25

Частотні коефіцієнти трикутних пластин (ССС) різної товщини

Form	$f, \text{Гц}$									
	$g_{1/120}$	$g_{1/60}$	$g_{1/30}$	$g_{1/20}$	$g_{1/15}$	$g_{1/12}$	$g_{1/10}$	$g_{1/8}$	$g_{1/6}$	$g_{1/5}$
1	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
2	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
3	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
4	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0
5	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0
6	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0
7	2,0	2,0	1,8	1,4	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0
8	2,0	2,0	1,8	1,4	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0
9	2,0	2,0	1,8	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0
10	2,0	2,0	1,8	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0
СЗ	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0

Перші десять частот планарних коливань трикутних пластин (ССС) зі співвідношеннями $h/a=1/240$ і $h/a=1/5$ представлені в таблиці 3.26, де ε – відхилення між частотами у відсотках. Пошук перших десяти планарних форм коливань для пластин зі співвідношенням $h/a=1/5$ відбувався в діапазоні частот від 4 до 25 частоти та для пластин зі співвідношенням $h/a=1/240$ в діапазоні частот від 131 до 293 частоти. Перші десять форм планарних коливань трикутної пластини (ССС) зі співвідношенням $h/a=1/5$ представлені на рис. 3.28.

Рис. 3.28. Форми планарних коливань трикутної пластинки (CCC) при $h/a=1/5$

Таблиця 3.26

Частоти планарних коливань трикутних пластин (CCC) різної товщини

Form(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$	Form(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$
1	20003,97	20134,71	0,65	6	32829,94	32456,73	1,14
2	20004,02	20135,16	0,66	7	33634,82	33601,15	0,10
3	24640,88	24678,19	0,15	8	33635,06	33602,66	0,10
4	31350,36	31378,89	0,09	9	39681,36	39677,33	0,01
5	31350,49	31380,41	0,10	10	41172,29	40805,29	0,89

Відповідні частоти планарних коливань для пластин різних товщин, які представлені в таблицях 3.17, 3.20, 3.23, 3.26, мають відхилення, яке не перевищує 1,2%, що свідчить про незалежність частоти планарних коливань від товщини пластини.

Дослідимо коефіцієнти граничних умов таблиці 3.10 для трикутних пластин (FCC) різної товщини. Отримані коефіцієнти представлені в таблиці 3.27.

Таблиця 3.27

Коефіцієнти граничних умов трикутних пластин різної товщини

Form	$\frac{f_{FCC}}{f_{FFF}}$										
	1/240	1/120	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5
1	1,17	1,17	1,17	1,16	1,15	1,14	1,13	1,11	1,10	1,07	1,05
2	2,70	2,70	2,70	2,66	2,61	2,55	2,48	2,41	2,30	2,15	2,04
3	2,88	2,89	2,88	2,84	2,78	2,70	2,62	2,53	2,39	2,18	2,04
4	2,05	2,05	2,04	2,00	1,94	1,88	1,82	1,76	1,68	1,61	1,59
5	2,31	2,31	2,30	2,24	2,17	2,08	2,00	1,93	1,83	1,71	1,64
6	2,19	2,20	2,19	2,15	2,09	2,02	1,96	1,90	1,83	1,71	1,64
7	2,38	2,38	2,37	2,29	2,20	2,10	2,01	1,92	1,82	1,68	1,61
8	1,87	1,87	1,86	1,81	1,75	1,69	1,64	1,59	1,54	1,49	1,48
9	2,03	2,04	2,02	1,96	1,89	1,81	1,74	1,69	1,62	1,57	1,55
10	2,04	2,05	2,03	1,96	1,88	1,79	1,72	1,65	1,58	1,48	1,43

Коефіцієнти граничних умов таблиці 3.27 зменшуються із збільшенням товщини пластини: перший коефіцієнт зменшується на 10% для пластини із співвідношенням 1/5 в порівнянні з коефіцієнтом для пластини 1/60; десятий коефіцієнт зменшується на 30% для пластини із співвідношенням 1/5 в порівнянні з коефіцієнтом для пластини 1/60; відмінність всіх коефіцієнтів до 8% спостерігається для пластин із співвідношеннями $h/a < 1/20$.

3.3.4. Розрахунок частот та форм вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин

МСЕ розраховано частоти та форми вільних коливань алюмінієвих рівнобедрених трикутних пластин [261] товщини $h = 2$ мм з кутами при вершині від 10° до 150° з кроком 10° з вільними краями (FFF) еквівалентних за масою пластині розглянутій в підпункті 3.3.1. Вибір максимальних і мінімальних кутів зумовлений використанням моделі пластини і стержня, тому введемо обмеження $0,1 \leq H/a_0 \leq 10$, де H/a_0 – відношення висоти до основи трикутника. Розміри основ a_0 та висот H рівнобедрених трикутників при відповідних значеннях кутів наведено в таблиці 3.28, де α – вершина трикутника, β – кут при основі трикутника.

Таблиця 3.28

Розміри основ a_0 та висот H рівнобедрених трикутників

	$\alpha, [^\circ]$	$\beta, [^\circ]$	$a_0, \text{мм}$	$H, \text{мм}$	H/a_0
1	10	85	93,43	533,93	5,715
2	20	80	132,63	376,10	2,836
3	30	75	163,50	305,10	1,866
4	40	70	190,56	261,78	1,374
5	50	65	215,69	231,27	1,072
6	60	60	240,00	207,85	0,866
7	70	55	264,30	188,73	0,714
8	80	50	289,33	172,41	0,596
9	90	45	315,86	157,93	0,500
10	100	40	344,81	144,67	0,420
11	110	35	377,47	132,15	0,350
12	120	30	415,69	120,00	0,289
13	130	25	462,55	107,84	0,233
14	140	20	523,55	95,28	0,182
15	150	15	610,19	81,75	0,134

Перші десять частот рівнобедрених трикутних пластин (FFF) при $0,1 \leq H/a_0 \leq 10$, отримані за допомогою FEMAP, наведено в таблиці 3.29 та на гістограмі (рис. 3.29).

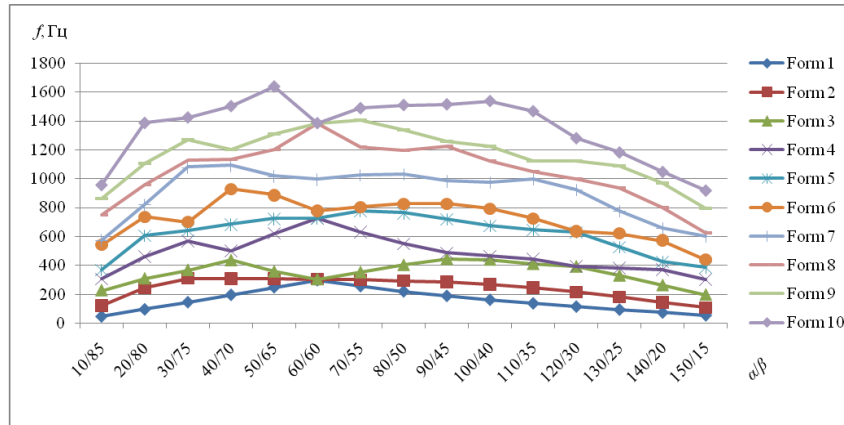


Рис. 3.29. Частоти вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин (FFF)

Таблиця 3.29

Частоти вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин (FFF)

Form	a/b							
	10/85	20/80	30/75	40/70	50/65	60/60	70/55	80/50
1	47,53	95,72	144,98	195,53	247,36	295,39	255,33	219,02
2	121,01	244,21	310,41	309,50	307,87	305,34	301,79	295,83
3	227,66	309,88	369,46	438,01	358,64	305,35	354,01	404,43
4	306,93	459,87	566,49	499,60	621,35	725,82	629,56	548,89
5	367,64	604,48	641,63	682,02	722,58	725,82	775,32	761,47
6	541,12	736,58	700,64	927,97	886,19	778,17	804,15	825,30
7	574,21	819,10	1078,48	1091,43	1016,60	994,75	1026,18	1030,68
8	748,28	960,29	1124,91	1131,97	1197,79	1380,39	1217,54	1193,08
9	860,93	1101,21	1268,86	1197,54	1304,90	1383,30	1403,57	1335,40
10	956,78	1384,64	1422,42	1500,85	1635,67	1383,31	1486,70	1507,95
Form	a/b							
	90/45	100/40	110/35	120/30	130/25	140/20	150/15	
1	188,25	161,30	137,09	114,82	93,99	74,17	55,09	
2	285,95	269,82	245,97	215,4	180,97	144,87	108,45	
3	446,02	441,58	411,67	393,79	330,62	263,74	196,91	
4	486,93	464,67	445,00	394,03	383,32	372,00	303,75	
5	719,05	673,60	646,99	629,04	525,27	424,52	384,9	
6	825,96	793,55	723,99	634,93	621,62	572,24	440,74	
7	983,91	973,67	996,12	922,56	776,40	658,45	602,98	
8	1224,08	1121,51	1048,89	995,24	936,13	799,19	625,28	
9	1257,31	1224,28	1119,36	1120,75	1085,26	968,64	792,14	
10	1512,93	1535,60	1465,46	1279,33	1181,11	1047,13	918,52	

Порівняння першої форми вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин при $0,1 \leq H/a_0 \leq 10$ наведено на рис. 3.30.

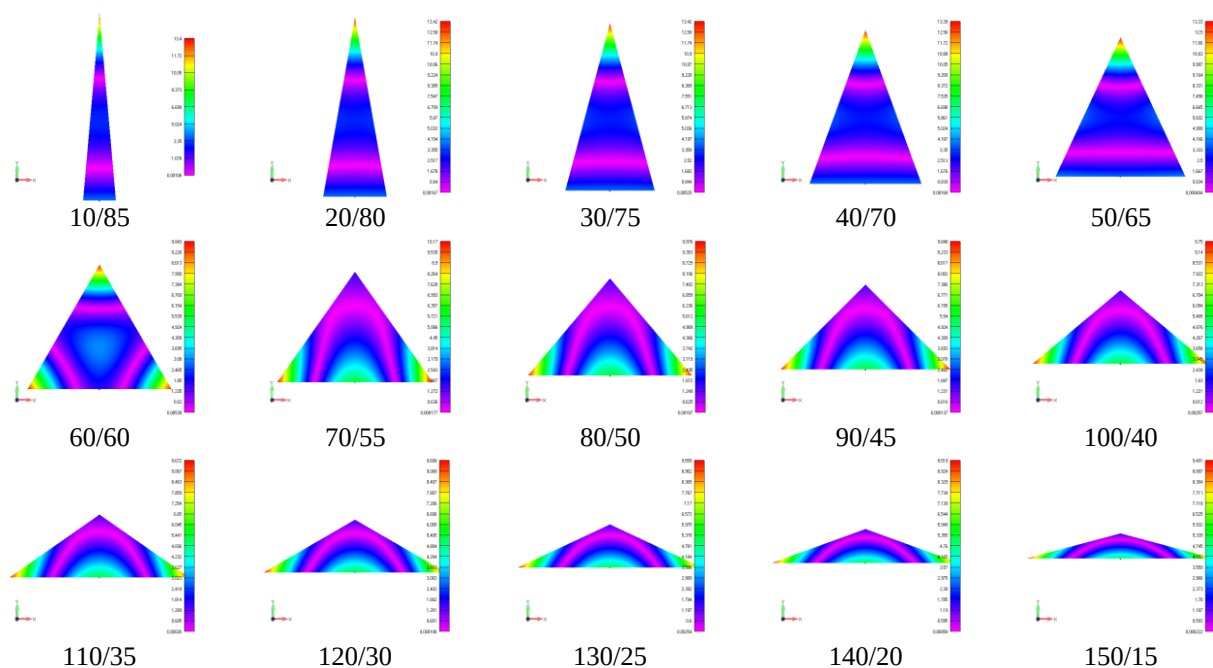


Рис. 3.30. Порівняння першої форми коливань рівнобедрених трикутних пластин

Порівняння другої форми вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин при $0,1 \leq H/a_0 \leq 10$ наведене на рис. 3.31.

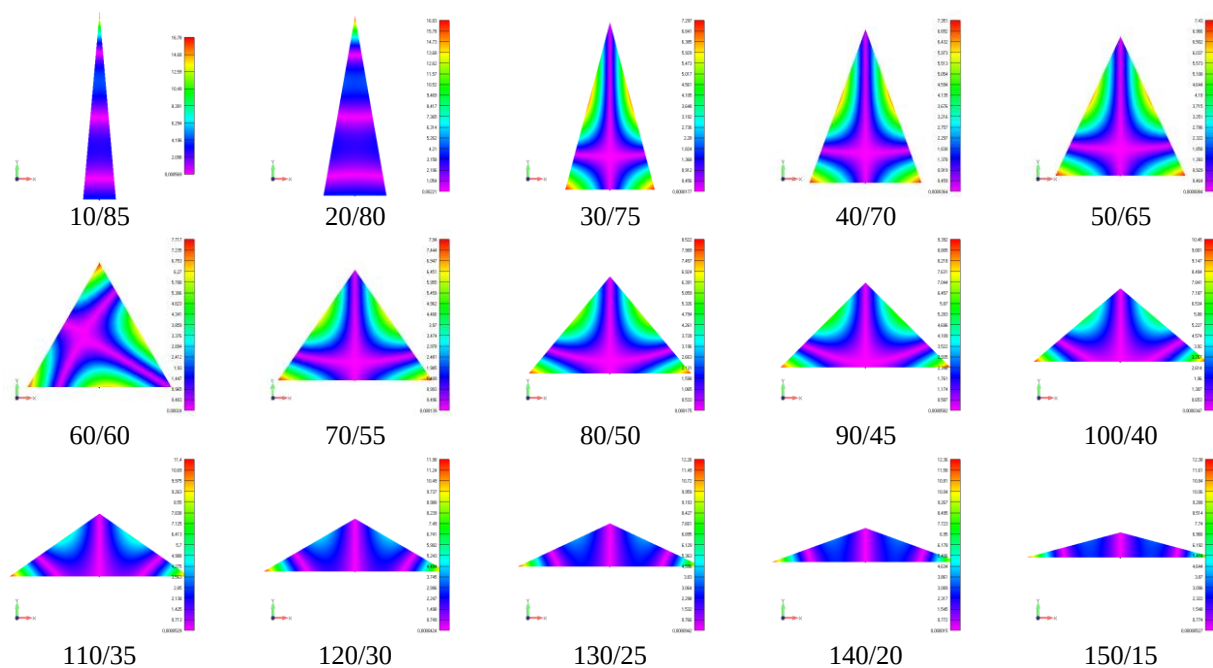


Рис. 3.31. Порівняння другої форми коливань рівнобедрених трикутних пластин

Порівняння третьої форми вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин при $0,1 \leq H/a_0 \leq 10$ наведене на рис. 3.32.

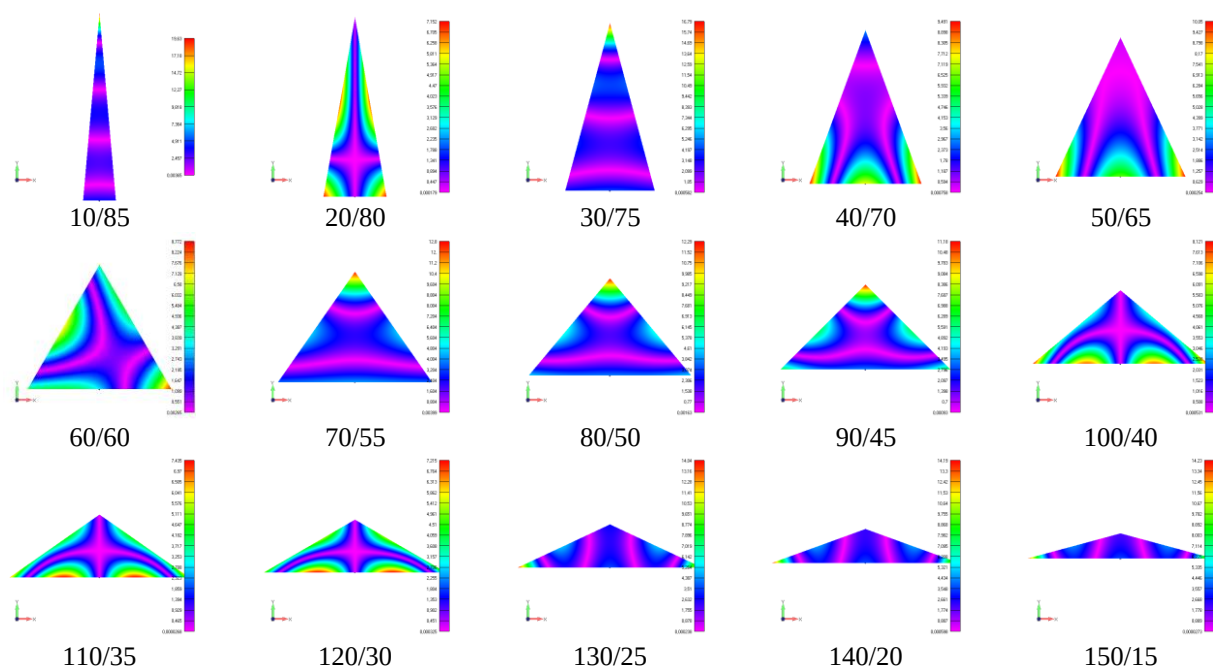


Рис. 3.32. Порівняння третьої форми коливань рівнобедрених трикутних пластин

Порівняння четвертої форми вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин при $0,1 \leq H/a_0 \leq 10$ наведене на рис. 3.33.

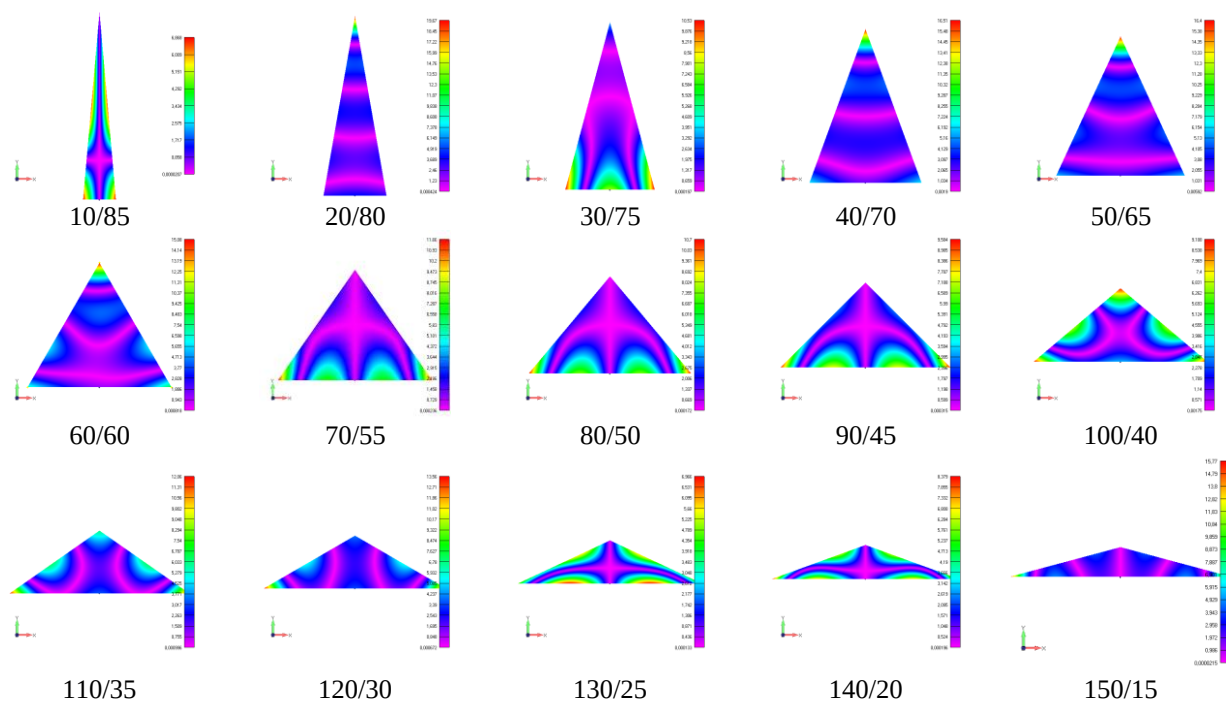


Рис. 3.33. Порівняння четвертої форми коливань рівнобедрених трикутних пластин

Порівняння п'ятої форми вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин при $0,1 \leq H/a_0 \leq 10$ наведене на рис. 3.34.

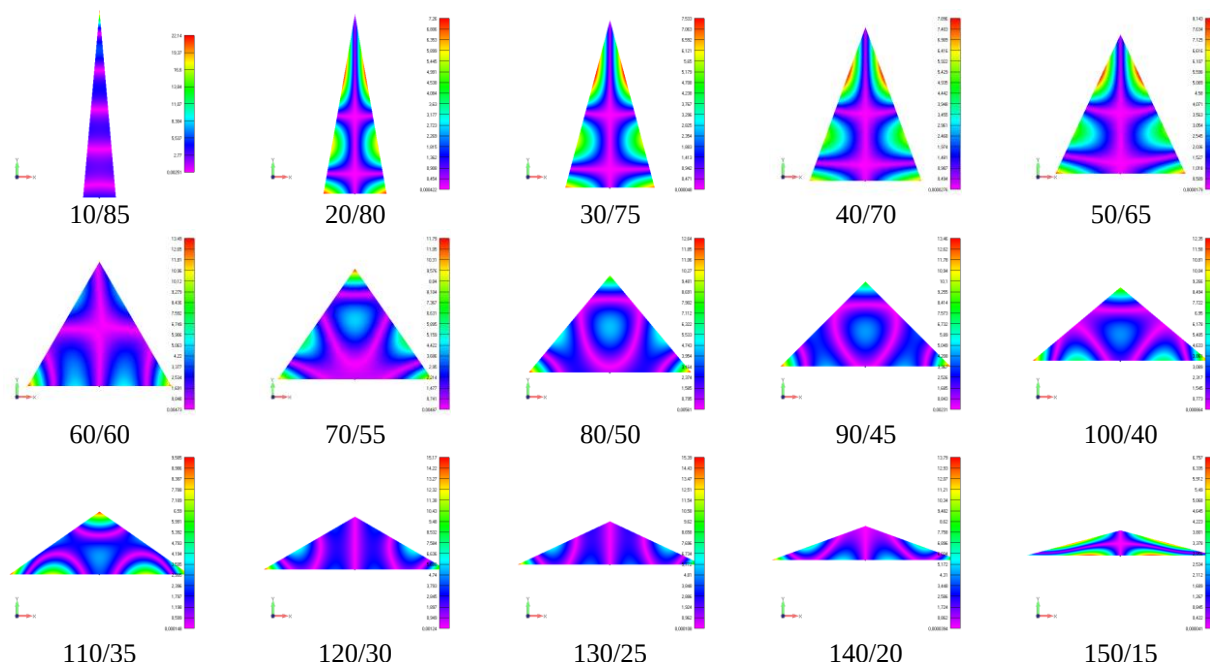


Рис. 3.34. Порівняння п'ятої форми коливань рівнобедрених трикутних пластин

Отримано залежність частот вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин від кута при вершині. Максимальні значення частот відповідають пластині з кутом при вершині 60° , що свідчить про її високу жорсткість, а мінімальні значення відповідають пластині з кутом при вершині 150° . Однакові форми коливань рівнобедрених трикутних пластин не відповідають одному порядковому номеру, оскільки всі пластини мають різну жорсткість, проте однаковість спектра форм коливань добре спостерігається.

3.4. Розрахунок частот та форм вільних коливань чотирикутних пластин

3.4.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань чотирикутних пластин при різних граничних умовах

За допомогою FEMAP побудовано геометрію квадратної пластини [262–264] зі стороною $a = 240\text{ мм}$, товщина пластини $h = 4\text{ мм}$ ($h/a = 1/60$). В якості матеріалу пластини задавався алюміній. Пластинка досліджувалась при різних варіантах жорстко (C) закріплених країв і вільних (F) країв (рис. 3.35). Скінченно-елементна розбивка проводилась solid-елементами розміром сторони $h/2$.

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань алюмінієвої квадратної пластини з різними варіантами жорсткого закріплення та вільних країв, які представлені в таблиці 3.30 та на гістограмі (рис. 3.36).

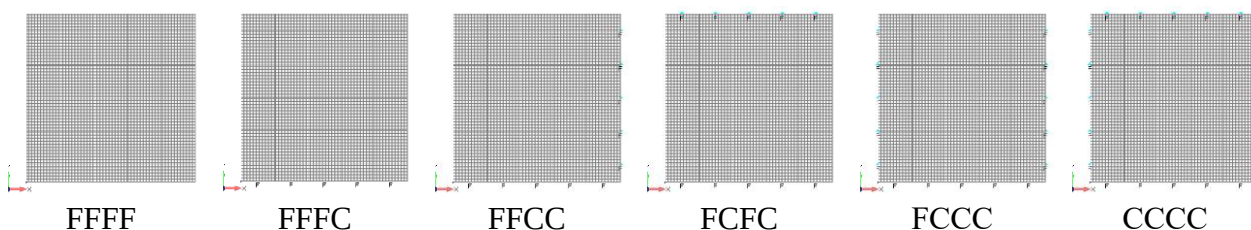


Рис. 3.35. Варіанти закріплення квадратної пластини

Для встановлення залежності частоти від накладених граничних умов були виведені коефіцієнти граничних умов, отримані в результаті ділення відповідної частоти закріпленої пластинки на відповідну частоту пластини з вільними краями, отримані коефіцієнти представлені в правій частині таблиці 3.30.

Таблиця 3.30

Частоти вільних коливань квадратної пластини з різними граничними умовами

Form	$f, \Gamma\text{ц}$						$\frac{f_{\text{FFFC}}}{f_{\text{FFFF}}}$	$\frac{f_{\text{FFCF}}}{f_{\text{FFFF}}}$	$\frac{f_{\text{FCFC}}}{f_{\text{FFFF}}}$	$\frac{f_{\text{FCCC}}}{f_{\text{FFFF}}}$	$\frac{f_{\text{CCCC}}}{f_{\text{FFFF}}}$
	FFFF	FFFC	FFCC	FCFC	FCCC	CCCC					
1	226,90	59,88	118,31	382,37	411,61	621,78	0,26	0,52	1,69	1,81	2,74
2	332,66	144,19	407,24	452,06	686,62	1265,15	0,43	1,22	1,36	2,06	3,80
3	421,56	364,56	458,00	744,89	1086,85	1265,15	0,86	1,09	1,77	2,58	3,00
4	588,95	466,72	812,30	1052,77	1317,29	1860,64	0,79	1,38	1,79	2,24	3,16
5	588,95	526,34	1073,05	1150,52	1381,49	2260,64	0,89	1,82	1,95	2,35	3,84
6	1050,18	919,46	1128,00	1366,17	1994,95	2271,79	0,88	1,07	1,30	1,90	2,16
7	1050,18	1053,82	1460,84	1494,81	2095,76	2827,54	1,00	1,39	1,42	2,00	2,69
8	1076,30	1095,12	1509,59	2060,58	2304,71	2827,54	1,02	1,40	1,91	2,14	2,63
9	1170,16	1214,98	2074,71	2118,93	2399,98	3602,24	1,04	1,77	1,81	2,05	3,08
10	1322,56	1580,58	2126,24	2166,33	2949,35	3602,24	1,20	1,61	1,64	2,23	2,72

Аналізуючи дані таблиці 3.30 та гістограми (рис. 3.36) можна спостерігати, що частоти квадратної пластини з вільними краями не є самими низькими в порівнянні з відповідними частотами пластини при інших варіантах закріплення, найнижчими є перші шість частоти пластинки з жорстко закріпленим одним торцем, для всіх інших частот спостерігається зростання відповідних частот зі збільшенням кількості закріплених торців.

Перші десять форм коливань квадратної пластини з варіантом закріплення (FFFF) представлені на рис. 3.37.

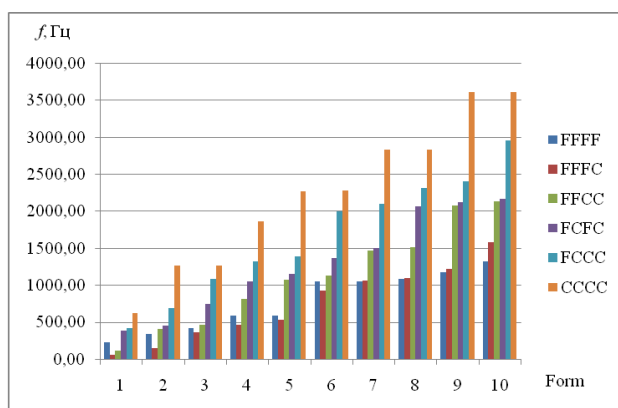


Рис. 3.36. Частоти вільних коливань квадратної пластини з різними граничними умовами

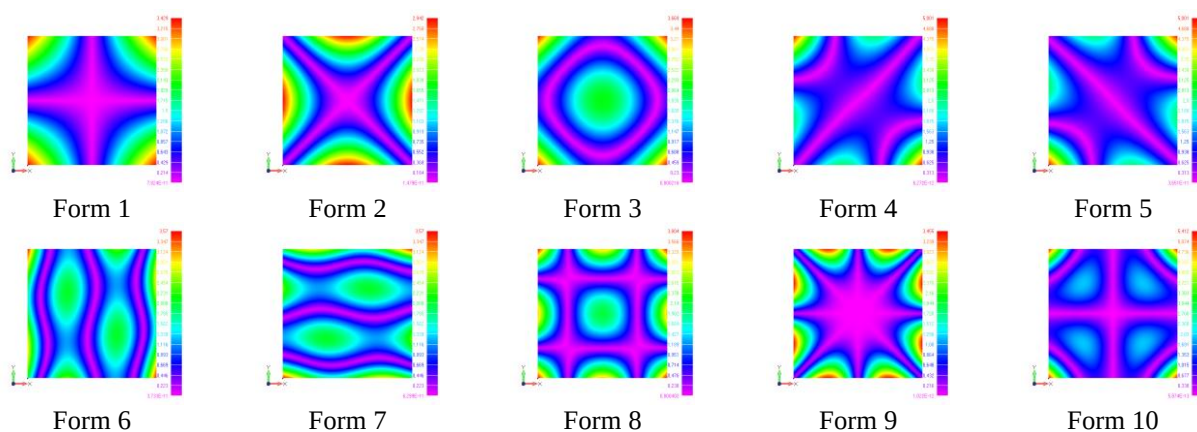


Рис. 3.37. Форми коливань квадратної пластини (FFFF)

Перші десять форм коливань квадратної пластини з варіантом закріплення (FFFC) представлені на рис. 3.38.

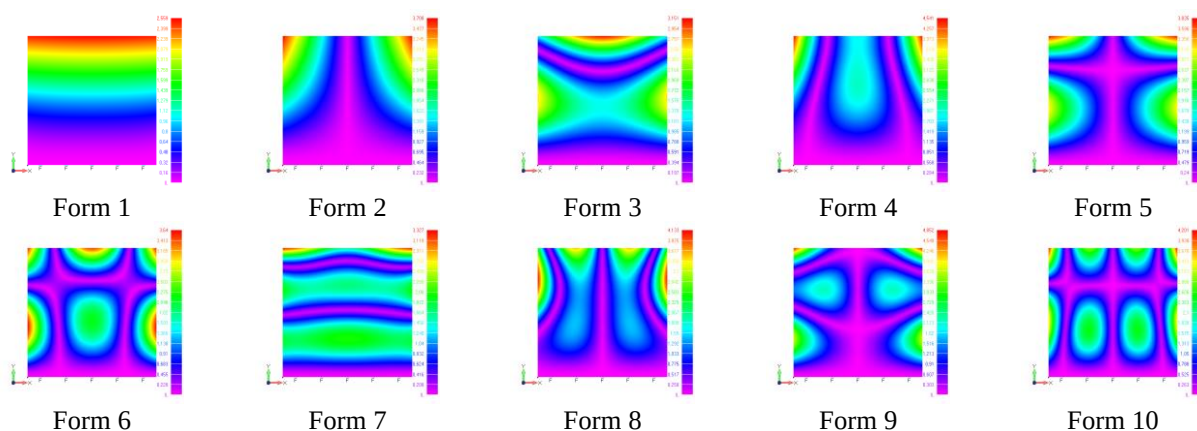


Рис. 3.38. Форми коливань квадратної пластини (FFFC)

Перші десять форм коливань квадратної пластини з варіантом закріплення (FFCC) представлені на рис. 3.39.

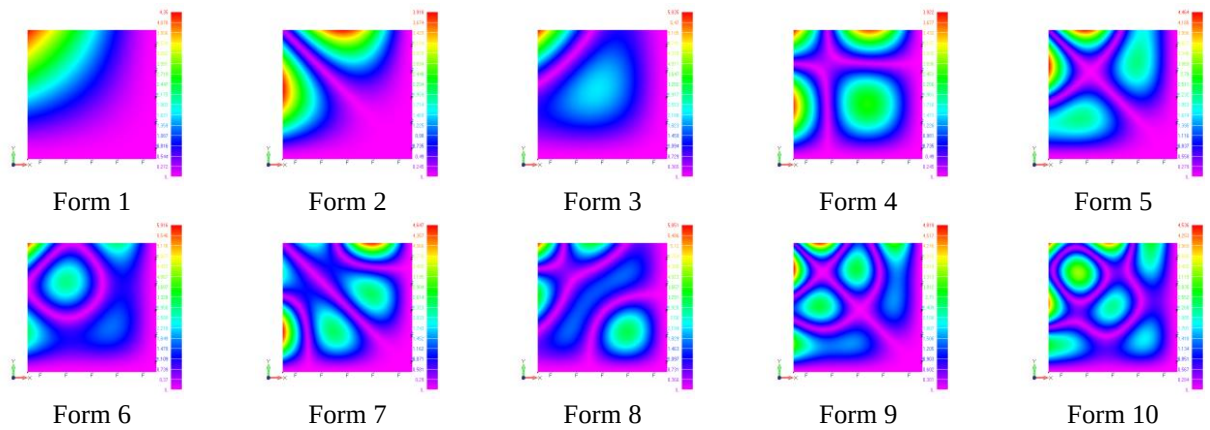


Рис. 3.39. Форми коливань квадратної пластини (FFCC)

Перші десять форм коливань квадратної пластини з варіантом закріплення (FCFC) представлені на рис. 3.40.

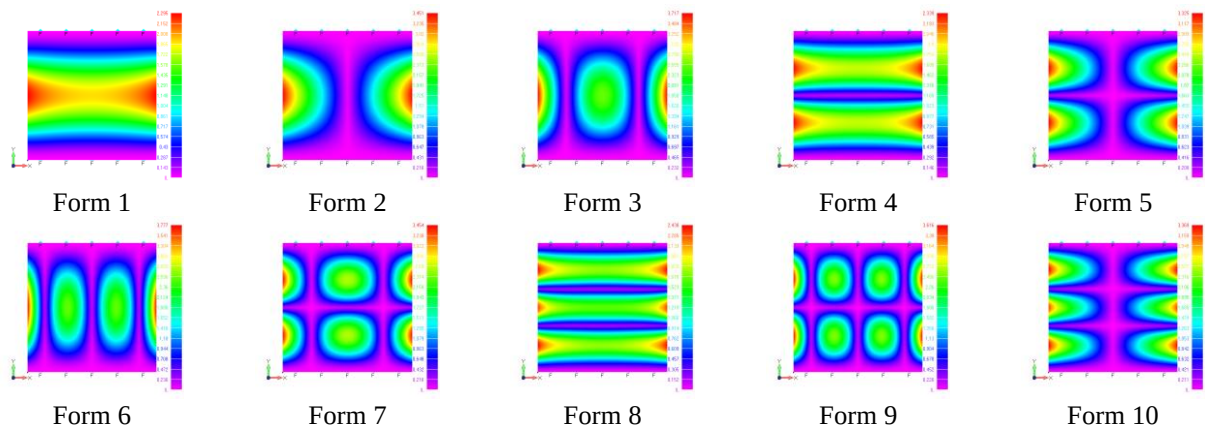


Рис. 3.40. Форми коливань квадратної пластини (FCFC)

Перші десять форм коливань квадратної пластини з варіантом закріплення (FCCC) представлені на рис. 3.41.

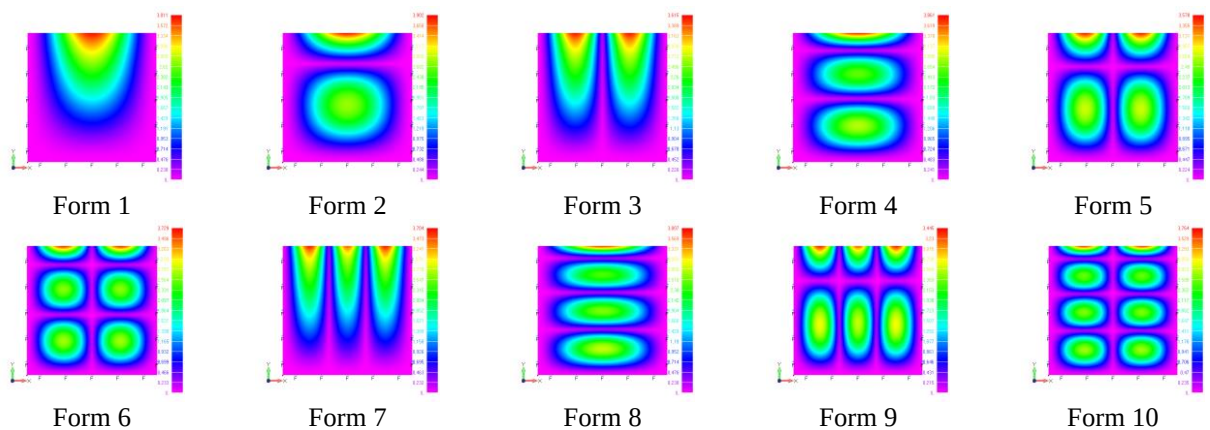


Рис. 3.41. Форми коливань квадратної пластини (FCCC)

Перші десять форм коливань квадратної пластини з варіантом закріплення (CCCC) представлені на рис. 3.42.

З метою дослідження коефіцієнтів граничних умов таблиці 3.30 проведемо аналогічні розрахунки для мідної квадратної пластини із співвідношенням товщини пластини до її сторони 1/60, але з іншими розмірами ($a = 1800\text{мм}$, $h = 30\text{мм}$).

Розраховані частоти вільних коливань мідної квадратної пластини з різними варіантами жорстко закріплених та вільних країв представлені в таблиці 3.31.

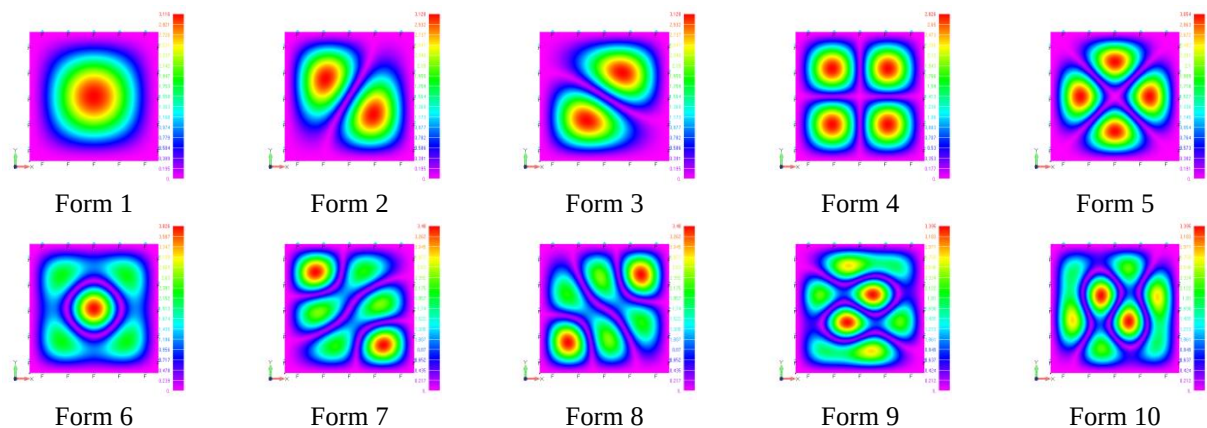


Рис. 3.42. Форми коливань квадратної пластини (CCCC)

Таблиця 3.31

Частоти вільних коливань мідної пластини з різними граничними умовами

Form	$f, \text{Гц}$						$\frac{f_{FFFC}}{f_{FFFF}}$	$\frac{f_{FFCC}}{f_{FFFF}}$	$\frac{f_{FCFC}}{f_{FFFF}}$	$\frac{f_{FCCC}}{f_{FFFF}}$	$\frac{f_{CCCC}}{f_{FFFF}}$
	FFFF	FFFC	FFCC	FCFC	FCCC	CCCC					
1	20,62	5,51	10,83	35,19	37,84	57,33	0,27	0,53	1,71	1,84	2,78
2	30,29	13,14	37,23	41,46	63,14	116,65	0,43	1,23	1,37	2,08	3,85
3	39,00	33,40	42,16	68,37	99,99	116,65	0,86	1,08	1,75	2,56	2,99
4	53,72	42,89	74,45	96,90	121,30	171,55	0,80	1,39	1,80	2,26	3,19
5	53,72	48,11	98,47	105,67	127,08	208,42	0,90	1,83	1,97	2,37	3,88
6	96,62	84,10	103,91	125,67	183,57	209,45	0,87	1,08	1,30	1,90	2,17
7	96,62	96,99	134,09	137,26	192,88	260,67	1,00	1,39	1,42	2,00	2,70
8	98,28	100,38	138,70	189,69	212,35	260,67	1,02	1,41	1,93	2,16	2,65
9	106,72	111,67	190,65	194,69	220,90	332,08	1,05	1,79	1,82	2,07	3,11
10	121,68	144,98	195,70	199,12	271,55	332,08	1,19	1,61	1,64	2,23	2,73

З аналізу коефіцієнтів двох різних за розміром та матеріалом квадратних пластин, представлених в таблиці 3.32, видно, що відповідні коефіцієнти є майже однакові з незначним відхиленням.

Коефіцієнти граничних умов для двох різних квадратних пластин

Form	Алюм.					Мідь				
	FFFC	FFCC	FCFC	FCCC	CCCC	FFFC	FFCC	FCFC	FCCC	CCCC
1	0,26	0,52	1,69	1,81	2,74	0,27	0,53	1,71	1,84	2,78
2	0,43	1,22	1,36	2,06	3,80	0,43	1,23	1,37	2,08	3,85
3	0,86	1,09	1,77	2,58	3,00	0,86	1,08	1,75	2,56	2,99
4	0,79	1,38	1,79	2,24	3,16	0,80	1,39	1,80	2,26	3,19
5	0,89	1,82	1,95	2,35	3,84	0,90	1,83	1,97	2,37	3,88
6	0,88	1,07	1,30	1,90	2,16	0,87	1,08	1,30	1,90	2,17
7	1,00	1,39	1,42	2,00	2,69	1,00	1,39	1,42	2,00	2,70
8	1,02	1,40	1,91	2,14	2,63	1,02	1,41	1,93	2,16	2,65
9	1,04	1,77	1,81	2,05	3,08	1,05	1,79	1,82	2,07	3,11
10	1,20	1,61	1,64	2,23	2,72	1,19	1,61	1,64	2,23	2,73

3.4.2. Розрахунок частот вільних коливань чотирикутних пластин при різних фізико-механічних характеристиках

Проводились розрахунки частот вільних коливань квадратної пластини [265, 266] ($h/a = 1/60$) з жорстко закріпленим одним краєм та вільними трьома краями (FFFC) при інших фізико-механічних характеристиках. Матеріалами, окрім алюмінію, обирались: сталь, нікель, мідь, титан, латунь, срібло, свинець, поліетилен та гума, фізико-механічні характеристики яких записані в підпункті 3.3.2.

Розраховані частоти для квадратної пластини (FFFC) представлені в таблиці 3.33 та у вигляді частотних кривих (рис. 3.43), частоти для пластин з гуми винесені на окрему гістограму у зв'язку з їх малими значеннями.

Таблиця 3.33

Частоти вільних коливань квадратної пластини (FFFC) з різних матеріалів

Form	<i>f, Гц</i>									
	Сталь	Нікель	Мідь	Титан	Латунь	Срібло	Алюм.	Свинець	Поліет.	Гума
1	61,04	56,14	41,32	58,17	38,81	32,69	59,88	15,29	19,30	0,62
2	147,64	138,17	98,58	140,70	92,61	77,27	144,19	34,92	46,67	1,38
3	372,31	344,74	250,50	354,83	235,32	197,31	364,56	90,60	117,70	3,62
4	475,97	438,73	321,70	453,62	302,20	254,30	466,72	118,65	150,47	4,81
5	538,16	500,81	360,86	512,89	338,98	283,64	526,34	129,41	170,13	5,15
6	939,87	873,96	630,75	895,73	592,52	496,14	919,46	227,19	297,13	9,07
7	1073,88	986,53	727,46	1023,45	683,36	575,85	1053,82	269,75	339,50	10,91
8	1118,13	1034,48	752,88	1065,62	707,24	593,36	1095,12	273,02	353,49	10,95
9	1239,01	1141,72	837,53	1180,82	786,76	662,09	1214,98	308,87	391,70	12,51
10	1613,44	1492,43	1087,35	1537,66	1021,43	857,78	1580,58	397,13	510,07	15,99

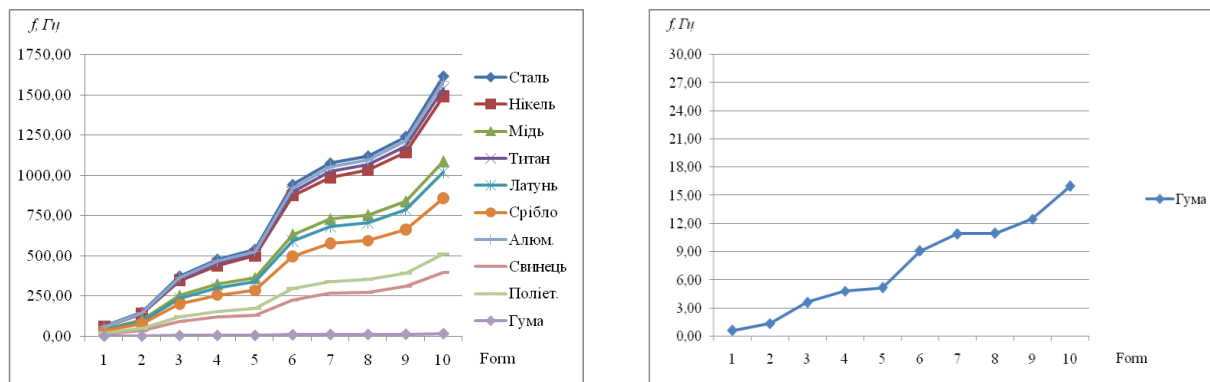


Рис. 3.43. Частоти вільних коливань квадратної пластини (FFFC) з різних матеріалів

Частотні коефіцієнти дев'яти розглянутих ізотропних матеріалів для квадратної пластини (FFFC) представлені в таблиці 3.34.

Таблиця 3.34

Частотні коефіцієнти ізотропних матеріалів для квадратної пластини (FFFC)

Form	$\mu_{i.m.}$								
	Нікель	Мідь	Титан	Латунь	Срібло	Алюм.	Свинець	Поліет.	Гума
1	0,92	0,68	0,95	0,64	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01
2	0,94	0,67	0,95	0,63	0,52	0,98	0,23	0,32	0,01
3	0,94	0,67	0,95	0,63	0,52	0,98	0,24	0,32	0,01
4	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01
5	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01
6	0,94	0,67	0,95	0,63	0,52	0,98	0,23	0,32	0,01
7	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,25	0,32	0,01
8	0,92	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01
9	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01
10	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,25	0,32	0,01
СЗ	0,93	0,67	0,95	0,63	0,53	0,98	0,24	0,32	0,01

Відмітимо однаковість частотних коефіцієнтів ізотропних матеріалів для кожної форми коливань для трикутних (підпункт 3.3.2) та чотирикутних пластин при різних способах закріплення, що встановлює залежність частоти коливань від фізико-механічних характеристик матеріалу через середнє значення (СЗ) коефіцієнтів, які не залежать від геометрії пластини та граничних умов.

3.4.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань чотирикутних пластин різної товщини

Проводились розрахунки частот вільних коливань алюмінієвих квадратних пластин при вільних (FFFF) та жорстко закріплених (CCCC) краях (рис. 3.35)

з параметрами: сторона пластини $a = 0,24\text{м}$, співвідношення товщини пластини до її сторони h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/8, 1/6, 1/5.

Розраховані частоти для квадратних пластини з вільними краями (FFFF) представлені в таблиці 3.35. Для представлення залежності частоти вільних коливань від величини співвідношення товщини пластини до її сторони h/a введемо коефіцієнти, які будуть показувати в скільки разів збільшилась частота пластини при збільшенні її товщини, тобто $g_{1/n} = f_{1/m} / f_{1/n}$ ($n > m$). Частотні коефіцієнти квадратних пластин (FFFF) різної товщини наведені в таблиці 3.36, де зазначено середнє значення (СЗ) коефіцієнтів.

Таблиця 3.35

Частоти вільних коливань квадратних пластин (FFFF) різної товщини

Form	$f, \text{Гц}$										
	1/240	1/120	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5
1	57,01	113,86	226,90	449,84	668,43	882,60	1090,90	1293,50	1586,07	2042,45	2378,91
2	83,28	166,46	332,66	663,35	990,25	1309,94	1624,00	1929,81	2372,55	3053,32	3549,25
3	105,55	210,98	421,56	840,04	1252,75	1655,78	2049,62	2431,41	2980,09	3816,71	4418,69
4	148,10	295,70	588,95	1164,81	1723,46	2260,39	2773,83	3261,71	3945,23	4946,99	5637,38
5	148,10	295,70	588,95	1164,81	1723,46	2260,39	2773,83	3261,71	3945,23	4946,99	5637,38
6	263,48	526,30	1050,18	2080,77	3075,13	4014,17	4899,93	5700,59	6779,49	8269,21	9237,68
7	263,48	526,30	1050,18	2080,77	3075,13	4014,17	4899,93	5722,55	6840,19	8379,55	9367,12
8	271,34	541,36	1076,30	2116,42	3107,25	4036,82	4902,12	5722,55	6840,19	8379,55	9367,12
9	294,71	588,03	1170,16	2304,30	3384,89	4391,58	5328,71	6188,09	7340,34	8887,32	9856,06
10	332,65	664,07	1322,56	2607,43	3831,66	4973,79	6032,48	7000,90	8292,73	10033,44	11129,34

Таблиця 3.36

Частотні коефіцієнти квадратних пластин (FFFF) різної товщини

Form	$g, \text{Гц}$									
	$g_{1/120}$	$g_{1/60}$	$g_{1/30}$	$g_{1/20}$	$g_{1/15}$	$g_{1/12}$	$g_{1/10}$	$g_{1/8}$	$g_{1/6}$	$g_{1/5}$
1	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,3	1,2
2	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,3	1,2
3	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,3	1,2
4	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,3	1,1
5	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,3	1,1
6	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
7	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
8	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
9	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
10	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
СЗ	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1

Перші десять форм коливань тонкої квадратної пластини з вільними краями (FFFF) при $h/a=1/60$ наведено на рис. 3.37, форми поперечних коливань є однаковими для всіх розглянутих товщин пластин.

Перші десять частот планарних коливань квадратних пластин (FFFF) зі співвідношеннями $h/a=1/240$ і $h/a=1/5$ представлені в таблиці 3.37, де ε – відхилення між частотами у відсотках. Пошук перших десяти планарних форм коливань для пластин зі співвідношенням $h/a=1/5$ відбувався в діапазоні частот від 6 до 26 частоти та для пластин зі співвідношенням $h/a=1/240$ в діапазоні частот від 177 до 370 частоти. Перші десять форм планарних коливань квадратної пластини (FFFF) зі співвідношенням $h/a=1/5$ представлені на рис. 3.44.

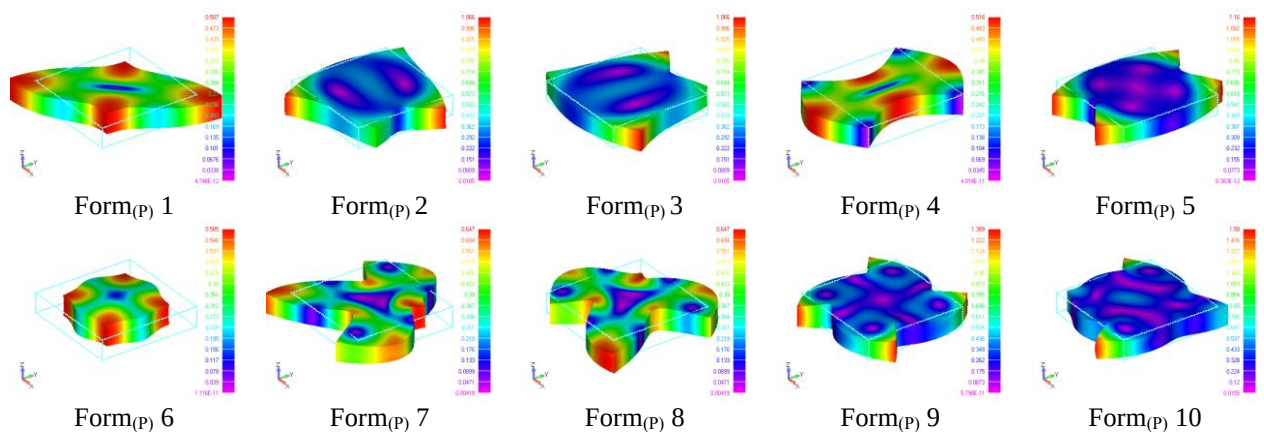


Рис. 3.44. Форми планарних коливань квадратної пластини (FFFF) при $h/a=1/5$

Таблиця 3.37

Частоти планарних коливань квадратних пластин (FFFF) різної товщини

Form(p)	1/240	1/5	ε , %	Form(p)	1/240	1/5	ε , %
1	8170,72	8170,20	0,01	6	12486,68	12404,52	0,66
2	8772,29	8754,66	0,20	7	13127,32	13103,62	0,18
3	8772,29	8754,66	0,20	8	13127,32	13103,62	0,18
4	9245,84	9240,49	0,06	9	15222,08	15146,99	0,49
5	10619,94	10579,03	0,39	10	17266,49	17473,10	1,20

Розраховані частоти для квадратних пластин з жорстко закріпленими всіма краями (CCCC) представлені в таблиці 3.38. Частотні коефіцієнти квадратних пластин (CCCC) різної товщини наведені в таблиці 3.39.

Перші десять частот планарних коливань квадратних пластин (CCCC) зі співвідношеннями $h/a=1/240$ і $h/a=1/5$ представлені в таблиці 3.40, де ε – відхилення між частотами у відсотках. Пошук перших десяти планарних

форм коливань для пластин зі співвідношенням $h/a=1/5$ відбувався в діапазоні частот від 4 до 23 частоти та для пластин зі співвідношенням $h/a=1/240$ в діапазоні частот від 206 до 442 частоти. Перші десять форм планарних коливань квадратної пластини (CCCC) зі співвідношенням $h/a=1/5$ представлені на рис. 3.45.

Таблиця 3.38

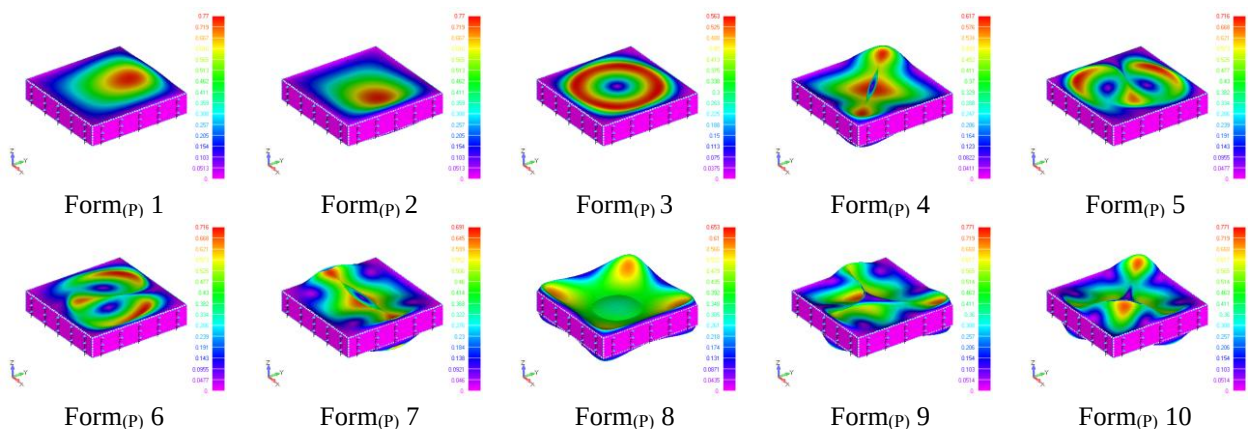
Частоти вільних коливань квадратних пластин (CCCC) різної товщини

Form	$f, \text{Гц}$										
	1/240	1/120	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5
1	155,61	311,01	621,78	1232,86	1825,70	2386,70	2912,30	3399,64	4053,78	4968,70	5552,12
2	317,34	633,90	1265,15	2490,41	3648,64	4703,27	5649,10	6485,93	7543,44	8900,98	9690,85
3	317,34	633,90	1265,15	2490,41	3648,64	4703,27	5649,10	6485,93	7543,44	8900,98	9690,85
4	467,73	933,80	1860,64	3638,39	5277,68	6729,68	7994,15	9082,46	10420,75	12071,81	13007,50
5	568,89	1135,43	2260,64	4405,27	6363,18	8058,86	9501,95	10714,38	12158,12	13887,81	14839,44
6	571,60	1140,88	2271,79	4429,49	6403,63	8118,75	9583,58	10818,69	12294,63	14070,59	15047,78
7	712,99	1422,30	2827,54	5478,34	7845,52	9860,05	11545,08	12941,85	14593,79	16534,18	17595,78
8	712,99	1422,30	2827,54	5478,34	7845,52	9860,05	11545,08	12941,85	14593,79	16534,18	17595,78
9	910,12	1814,56	3602,24	6937,13	9865,59	12273,91	14226,11	15796,94	17587,64	19639,49	20728,32
10	910,12	1814,56	3602,24	6937,13	9865,59	12273,91	14226,11	15796,94	17587,64	19639,49	20728,32

Таблиця 3.39

Частотні коефіцієнти квадратних пластин (CCCC) різної товщини

Form	$f, \text{Гц}$									
	$g_{1/120}$	$g_{1/60}$	$g_{1/30}$	$g_{1/20}$	$g_{1/15}$	$g_{1/12}$	$g_{1/10}$	$g_{1/8}$	$g_{1/6}$	$g_{1/5}$
1	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1
2	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,1
3	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,1
4	2,0	2,0	2,0	1,5	1,3	1,2	1,1	1,1	1,2	1,1
5	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
6	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
7	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
8	2,0	2,0	1,9	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
9	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
10	2,0	2,0	1,9	1,4	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
C3	2,0	2,0	2,0	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	1,2	1,1

Рис. 3.45. Форми планарних коливань квадратної пластини (CCCC) при $h/a=1/5$

Частоти планарних коливань квадратних пластин (CCCC) різної товщини

Form(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$	Form(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$
1	12694,70	12772,24	0,61	6	20760,16	20712,88	0,23
2	12694,70	12772,24	0,61	7	20854,72	20906,73	0,25
3	14903,59	14892,95	0,07	8	24066,89	23857,98	0,87
4	18454,60	18504,10	0,27	9	25284,17	25248,13	0,14
5	20760,16	20712,88	0,23	10	25284,17	25248,13	0,14

3.5. Розрахунок частот та форм вільних коливань п'ятикутних пластин

3.5.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань п'ятикутних пластин при різних граничних умовах

За допомогою FEMAP побудовано геометрію п'ятикутної пластини правильної форми [267-270] зі стороною $a = 240\text{мм}$, товщина пластини $h = 4\text{мм}$ ($h/a = 1/60$). В якості матеріалу пластини задавався алюміній. Пластинка досліджувалась при різних варіантах жорстко (C) закріплених країв і вільних (F) країв (рис. 3.46). Скінченно-елементна розбивка проводилась лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони $1,5 h$. Розрахунок проводився на визначення частот і форм вільних коливань.

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань алюмінієвої п'ятикутної пластини з різними варіантами жорсткого закріплення та вільних країв, які представлені в таблиці 3.41 та на гістограмі (рис. 3.47).

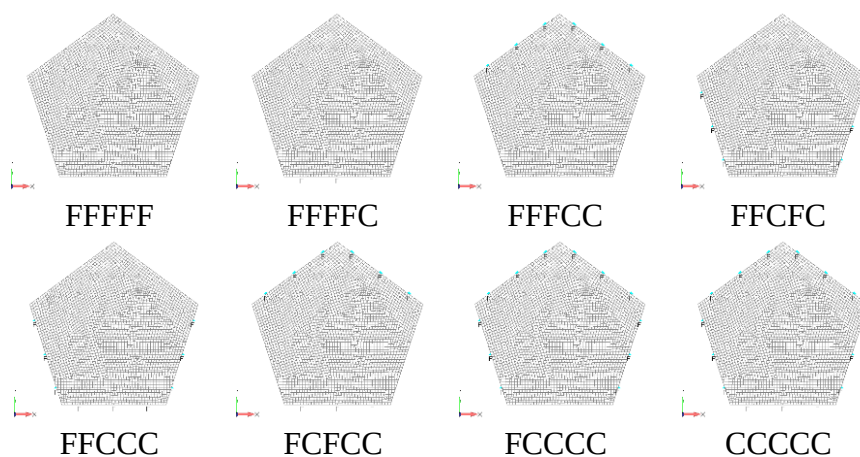


Рис. 3.46. Варіанти закріплення п'ятикутної пластини

Для встановлення залежності частоти від накладених граничних умов були виведені коефіцієнти граничних умов, отримані в результаті ділення відповідної частоти закріпленої пластинки на відповідну частоту пластини з вільними краями, отримані коефіцієнти представлені в нижній частині таблиці 3.41.

Таблиця 3.41

Частоти вільних коливань п'ятикутної пластини з різними граничними умовами

Form	$f, \text{Гц}$							
	FFFFF	FFFFC	FFFC	FFCFC	FFCCC	FCFCC	FCCCC	CCCCC
1	160,19	31,38	51,91	106,57	106,84	266,66	289,91	341,91
2	160,30	77,43	142,67	271,60	305,56	364,02	436,36	705,17
3	272,64	163,03	273,61	345,19	345,22	485,72	692,21	705,24
4	379,29	279,11	358,08	403,27	575,02	692,41	757,46	1137,05
5	379,35	320,86	454,17	614,80	702,70	785,29	967,26	1138,12
6	548,10	439,84	634,42	691,07	774,46	949,20	1157,98	1301,73
7	548,18	511,06	747,04	796,34	1029,32	1011,23	1298,68	1675,75
8	744,01	676,40	768,76	939,53	1037,75	1277,60	1311,55	1676,16
9	744,33	768,20	1002,98	1062,36	1247,47	1331,84	1662,10	1918,80
10	883,40	791,71	1082,76	1118,72	1312,55	1334,04	1747,30	1919,04
Form	$\frac{f_{FFFFC}}{f_{FFFFF}}$	$\frac{f_{FFFC}}{f_{FFFFF}}$	$\frac{f_{FFCFC}}{f_{FFFFF}}$	$\frac{f_{FFCCC}}{f_{FFFFF}}$	$\frac{f_{FCFCC}}{f_{FFFFF}}$	$\frac{f_{FCCCC}}{f_{FFFFF}}$	$\frac{f_{CCCCC}}{f_{FFFFF}}$	
1	0,20	0,32	0,67	0,67	1,66	1,81	2,13	
2	0,48	0,89	1,69	1,91	2,27	2,72	4,40	
3	0,60	1,00	1,27	1,27	1,78	2,54	2,59	
4	0,74	0,94	1,06	1,52	1,83	2,00	3,00	
5	0,85	1,20	1,62	1,85	2,07	2,55	3,00	
6	0,80	1,16	1,26	1,41	1,73	2,11	2,37	
7	0,93	1,36	1,45	1,88	1,84	2,37	3,06	
8	0,91	1,03	1,26	1,39	1,72	1,76	2,25	
9	1,03	1,35	1,43	1,68	1,79	2,23	2,58	
10	0,90	1,23	1,27	1,49	1,51	1,98	2,17	

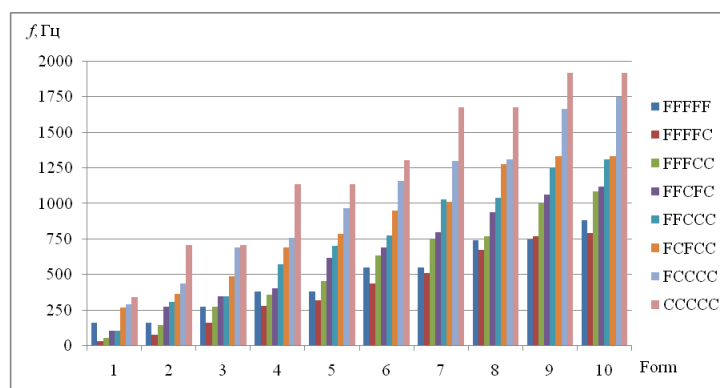


Рис. 3.47. Частоти вільних коливань п'ятикутної пластини з різними граничними умовами

Аналізуючи дані таблиці 3.41 та гістограми (рис. 3.47) можна спостерігати, що частоти п'ятикутної пластини з вільними краями не є

самими низькими в порівнянні з відповідними частотами при інших варіантах закріплення, найнижчими є перші десять частоти, окрім дев'ятої частоти, пластини з жорстко закріпленим одним торцем, для всіх інших частот спостерігається зростання відповідних частот зі збільшенням кількості закріплених торців.

Перші десять форм коливань п'ятикутної пластини з варіантом закріплення (FFFFF) представлені на рис. 3.48.

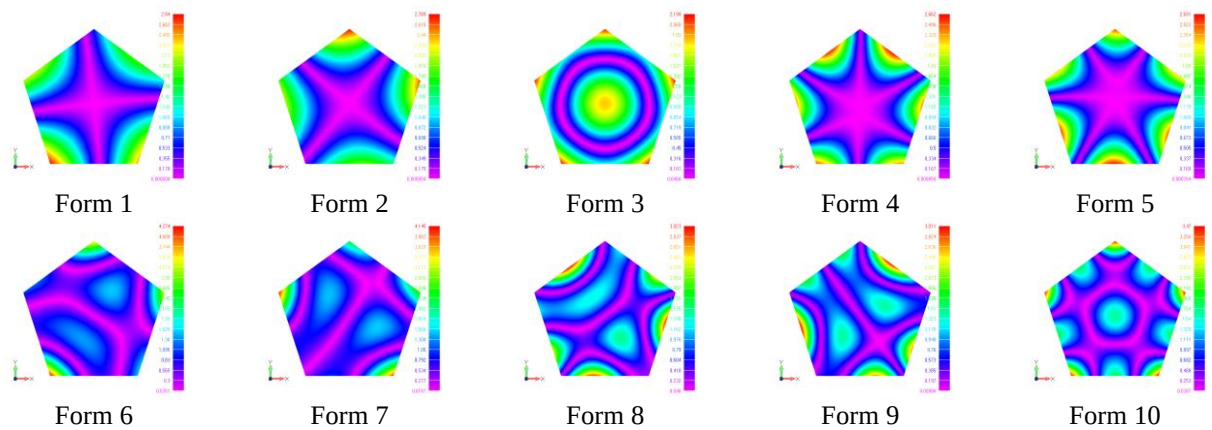


Рис. 3.48. Форми коливань п'ятикутної пластини (FFFFF)

Перші десять форм коливань п'ятикутної пластини з варіантом закріплення (FFFFC) представлені на рис. 3.49.

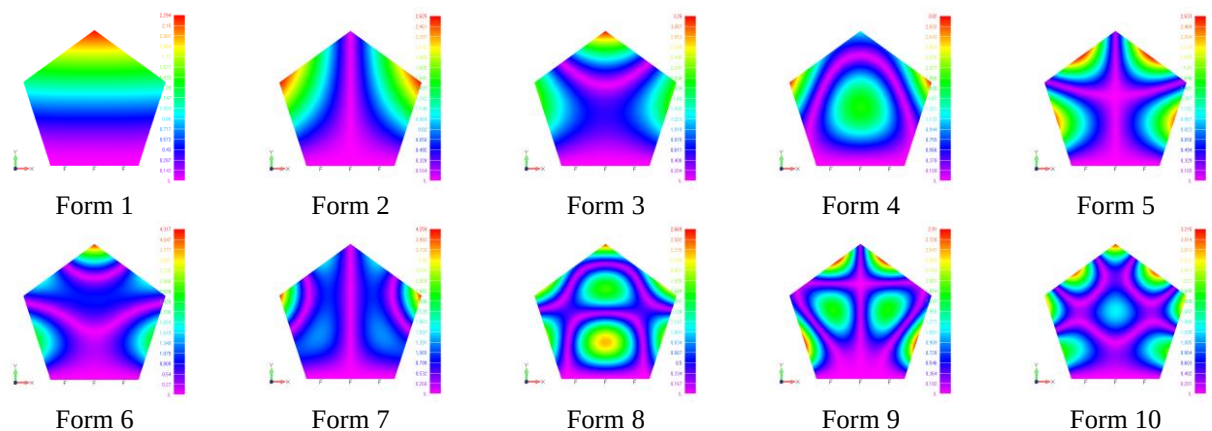


Рис. 3.49. Форми коливань п'ятикутної пластини (FFFFC)

Перші десять форм коливань п'ятикутної пластини з варіантом закріплення (FFFC) представлені на рис. 3.50.

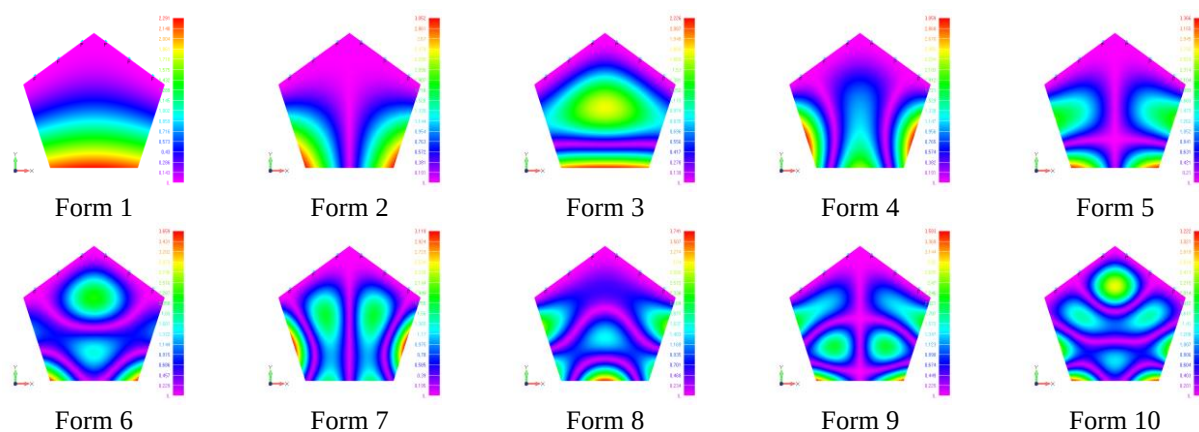


Рис. 3.50. Форми коливань п'ятикутної пластини (FFFCC)

Перші десять форм коливань п'ятикутної пластини з варіантом закріплення (FFCFC) представлені на рис. 3.51.

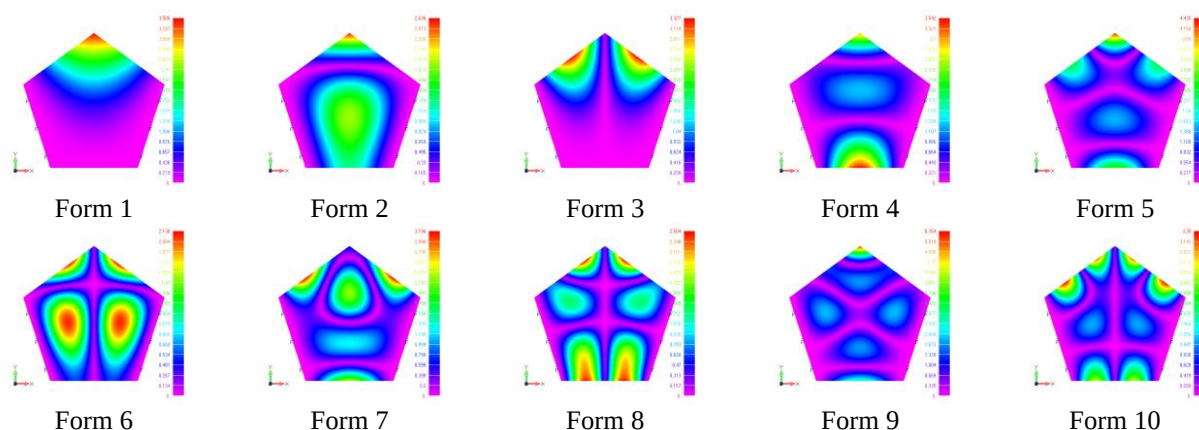


Рис. 3.51. Форми коливань п'ятикутної пластини (FFCFC)

Перші десять форм коливань п'ятикутної пластини з варіантом закріплення (FFCCC) представлені на рис. 3.52.

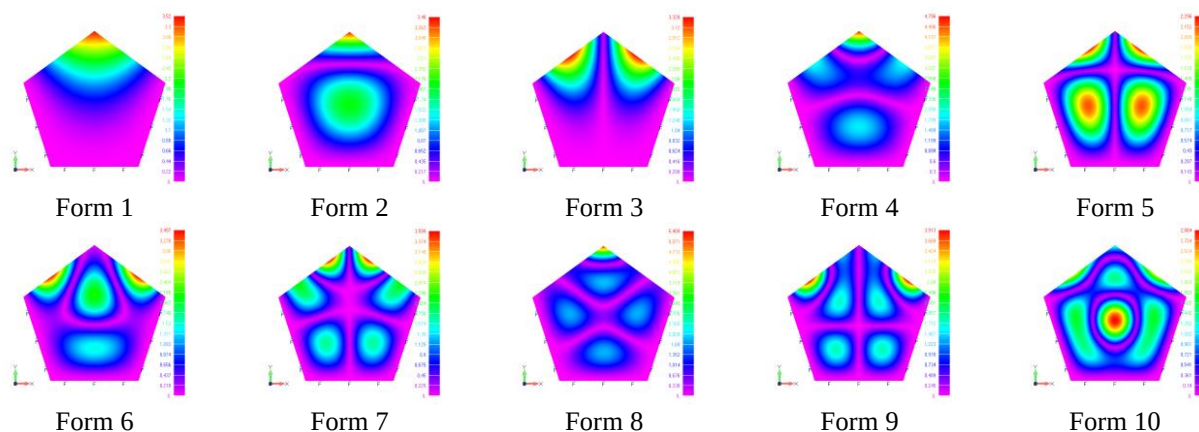


Рис. 3.52. Форми коливань п'ятикутної пластини (FFCCC)

Перші десять форм коливань п'ятикутної пластини з варіантом закріплення (FCFCC) представлені на рис. 3.53.

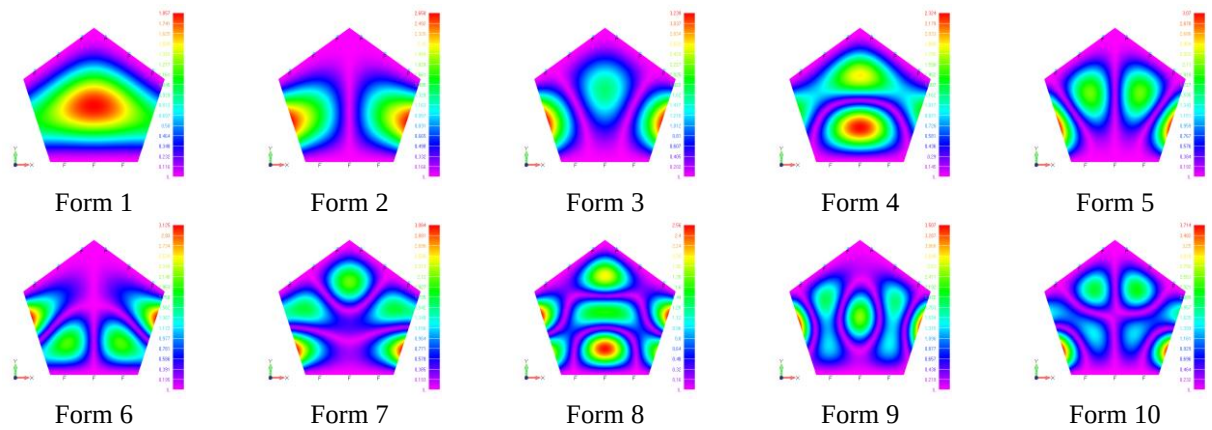


Рис. 3.53. Форми коливань п'ятикутної пластини (FCFCC)

Перші десять форм коливань п'ятикутної пластини з варіантом закріплення (FCCCC) представлені на рис. 3.54.

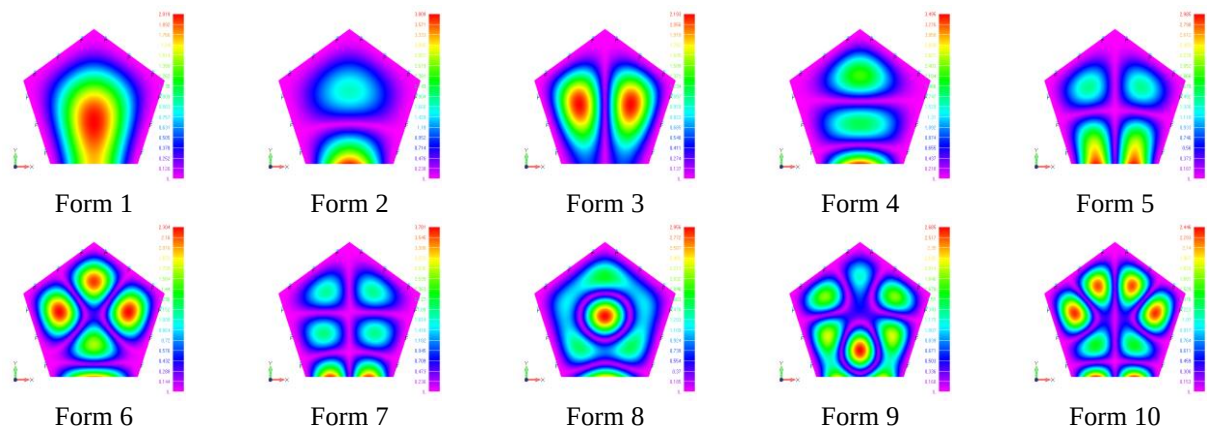


Рис. 3.54. Форми коливань п'ятикутної пластини (FCCCC)

Перші десять форм коливань п'ятикутної пластини з варіантом закріплення (CCCCC) представлені на рис. 3.55.

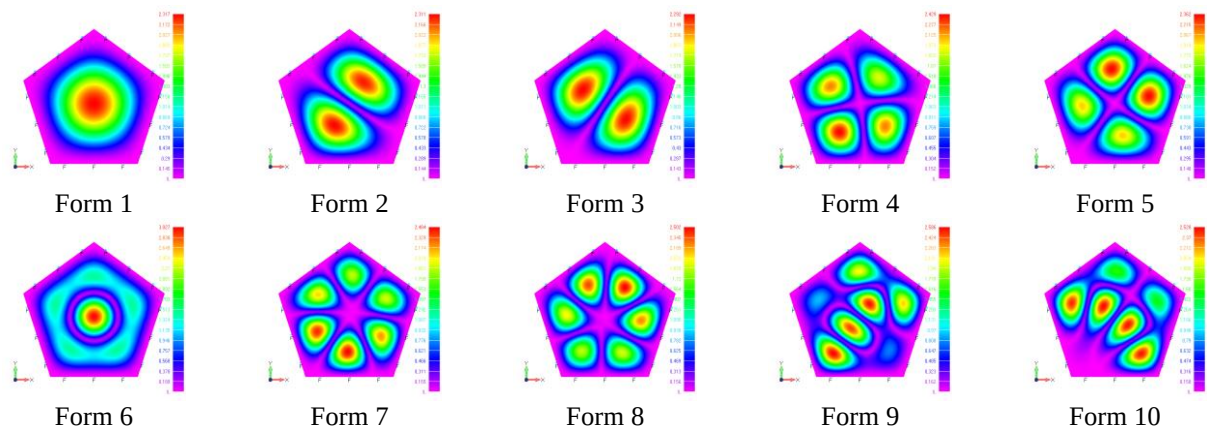


Рис. 3.55. Форми коливань п'ятикутної пластини (CCCCC)

3.5.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань п'ятикутних пластин різної товщини

Проводились розрахунки частот вільних коливань алюмінієвих п'ятикутних пластин різної товщини з вільними краями (FFFFF) та жорстко закріпленим одним краєм (FFFFC) (рис. 3.46) з параметрами: сторона пластини $a = 0,24\text{м}$, співвідношення товщини пластини до її сторони h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/8, 1/6, 1/5.

Розраховані частоти для п'ятикутних пластини з вільними краями (FFFFF) представлені в таблиці 3.42.

Таблиця 3.42

Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин (FFFFF) різної товщини

Form	$f, \text{Гц}$										
	1/240	1/120	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5
1	40,28	80,28	160,19	318,97	476,00	630,98	782,88	933,56	1152,56	1500,70	1763,64
2	40,35	80,31	160,30	318,98	476,02	631,00	783,06	933,59	1152,69	1500,99	1763,96
3	68,43	136,57	272,64	544,28	813,47	1079,20	1335,32	1596,44	1966,62	2547,74	2980,17
4	95,38	190,20	379,29	753,52	1120,67	1479,06	1821,79	2163,73	2642,57	3372,26	3898,10
5	95,61	190,32	379,35	753,64	1120,82	1479,24	1822,12	2163,97	2643,15	3372,84	3898,73
6	137,84	275,01	548,10	1087,64	1613,68	2122,86	2604,61	3079,60	3733,61	4701,21	5374,48
7	137,95	275,04	548,18	1087,66	1613,72	2122,90	2604,79	3079,66	3734,00	4701,32	5374,58
8	187,45	373,73	744,01	1477,17	2189,09	2873,76	3504,42	4142,44	4987,40	6206,28	7031,55
9	187,50	373,75	744,33	1444,36	2189,37	2874,11	3505,02	4142,91	4988,99	6207,03	7032,34
10	222,62	443,94	883,40	1744,43	2571,11	3356,22	4085,04	4783,30	5719,52	7036,11	7908,13

Перші десять форм коливань тонкої п'ятикутної пластини з вільними краями (FFFFF) при $h/a=1/60$ наведено на рис. 3.48, форми поперечних коливань є однаковими для всіх розглянутих товщин пластин.

Перші десять частот планарних коливань п'ятикутної пластини з

вільними краями (FFFFF) зі співвідношеннями $h/a=1/240$ і $h/a=1/5$ представлені в таблиці 3.43, де ε – відхилення між частотами у відсотках. Пошук перших десяти планарних форм коливань для пластин зі співвідношенням $h/a=1/5$ відбувався в діапазоні частот від 8 до 28 частоти та для пластин зі співвідношенням $h/a=1/240$ в діапазоні частот від 202 до 370 частоти. Перші десять форм планарних коливань п'ятикутної пластини (FFFFF) зі співвідношенням $h/a=1/5$ представлені на рис. 3.56.

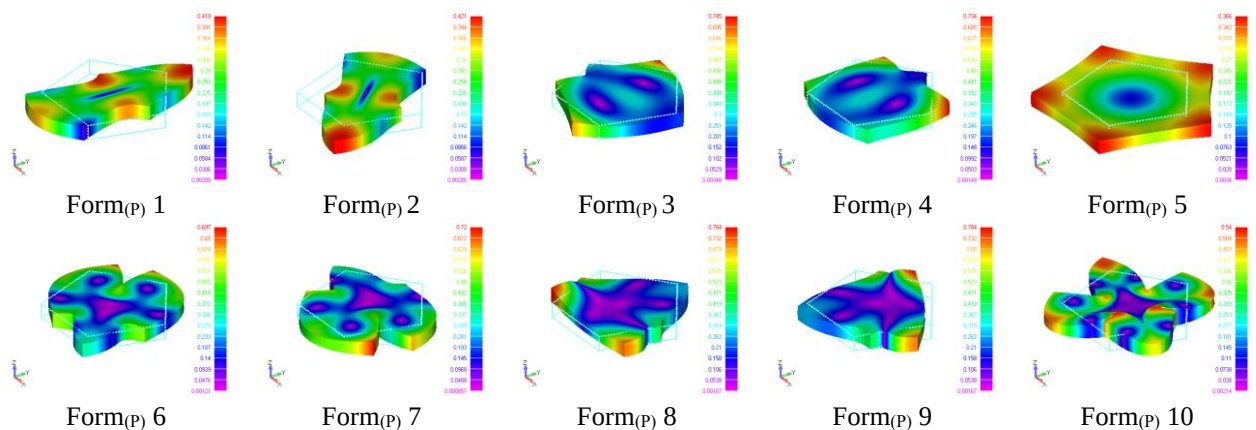


Рис. 3.56. Форми планарних коливань п'ятикутних пластин (FFFFF) при $h/a=1/5$

Таблиця 3.43

Частоти планарних коливань п'ятикутних пластин (FFFFF) різної товщини

Form(p)	1/240	1/5	ε , %	Form(p)	1/240	1/5	ε , %
1	6583,71	6583,51	0,00	6	9994,89	9986,15	0,09
2	6583,72	6583,52	0,00	7	9994,97	9986,25	0,09
3	7320,39	7314,34	0,08	8	10652,84	10638,42	0,14
4	7320,41	7314,41	0,08	9	10652,91	10638,48	0,14
5	9893,64	9850,33	0,44	10	13031,12	13017,96	0,10

Розраховані частоти для п'ятикутних пластини з жорстко закріпленням одним краєм (FFFFC) представлені в таблиці 3.44.

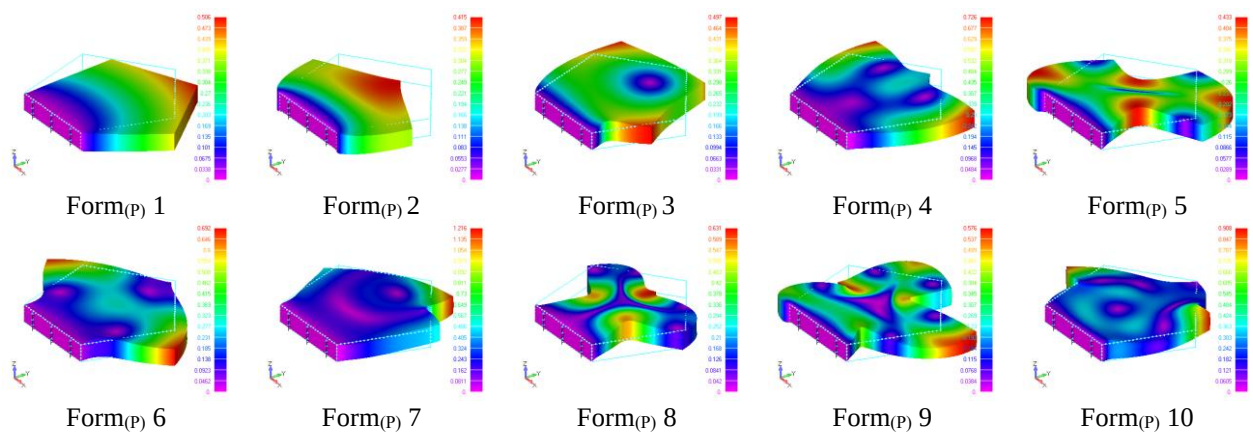
Перші десять форм коливань тонкої п'ятикутної пластини з вільними краями (FFFFC) при $h/a=1/60$ наведено на рис. 3.49, форми поперечних коливань є однаковими для всіх розглянутих товщин пластин.

Таблиця 3.44

Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин (FFFFC) різної товщини

Form	$f, \text{Гц}$										
	1/240	1/120	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5
1	7,87	15,73	31,41	62,69	93,84	124,92	155,72	186,36	232,01	307,01	365,86
2	19,45	38,82	77,46	154,31	230,25	305,32	378,83	450,95	556,12	722,22	846,00
3	40,96	81,72	162,93	324,02	482,52	638,48	790,49	938,87	1153,77	1489,22	1735,92
4	70,18	140,00	279,45	556,52	829,62	1097,60	1358,50	1611,68	1975,71	2534,10	2936,22
5	81,01	161,14	321,28	639,11	951,15	1256,10	1551,07	1835,64	2240,94	2853,37	3286,74
6	111,33	220,95	440,01	872,50	1293,38	1701,23	2091,31	2463,79	2986,99	3760,87	4296,46
7	129,32	256,69	511,24	1013,98	1503,25	1976,76	2429,55	2861,02	3465,38	4354,45	4965,83
8	171,83	340,51	678,11	1344,53	1990,54	2610,30	3196,48	3747,33	4506,09	5588,51	6308,95
9	195,71	386,78	770,03	1525,16	2255,08	2953,62	3613,96	4233,98	5085,87	6298,48	7077,79
10	201,01	398,39	792,23	1565,13	2307,19	3013,89	3675,43	4292,24	5131,61	6309,03	7102,71

Перші десять частот планарних коливань п'ятикутної пластини з вільними краями (FFFFF) зі співвідношеннями $h/a=1/240$ і $h/a=1/5$ представлені в таблиці 3.45, де ε – відхилення між частотами у відсотках. Пошук перших десяти планарних форм коливань для пластин зі співвідношенням $h/a=1/5$ відбувався в діапазоні частот від 3 до 26 частоти та для пластин зі співвідношенням $h/a=1/240$ в діапазоні частот від 47 до 346 частоти. Перші десять форм планарних коливань п'ятикутної пластини (FFFFF) зі співвідношенням $h/a=1/5$ представлені на рис. 3.57.

Рис.3.57. Форми планарних коливань п'ятикутних пластин (FFFFF) при $h/a=1/5$

Таблиця 3.45

Частоти планарних коливань п'ятикутних пластин (FFFFF) різної товщини

Form(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$	Form(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$
1	1324,04	1331,7	0,58	6	7953,63	7951	0,03
2	3684,9	3700,09	0,41	7	9572,79	9561,9	0,11
3	4394,36	4395,03	0,02	8	10525,37	10510,82	0,14
4	7675,87	7674,8	0,01	9	11310,24	11310,12	0,00
5	7822,7	7832,19	0,12	10	12447,78	12437,66	0,08

3.6. Розрахунок частот та форм вільних коливань шестикутних пластин

3.6.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань шестикутних пластин при різних граничних умовах

За допомогою FEMAP побудовано геометрію шестикутної пластини правильної форми [271-273] зі стороною $a = 240\text{мм}$, товщина пластини $h = 4\text{мм}$ ($h/a = 1/60$). В якості матеріалу пластини задавався алюміній. Пластинка досліджувалась при різних варіантах жорстко (C) закріплених країв і вільних (F) країв (рис. 3.58). Скінченно-елементна розбивка проводилась solid-елементами розміром сторони h . Розрахунок проводився на визначення частот і форм вільних коливань.

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань алюмінієвої шестикутної пластини з різними варіантами жорсткого закріплення та вільних країв, які представлені в таблиці 3.46 та на гістограмі (рис. 3.59).

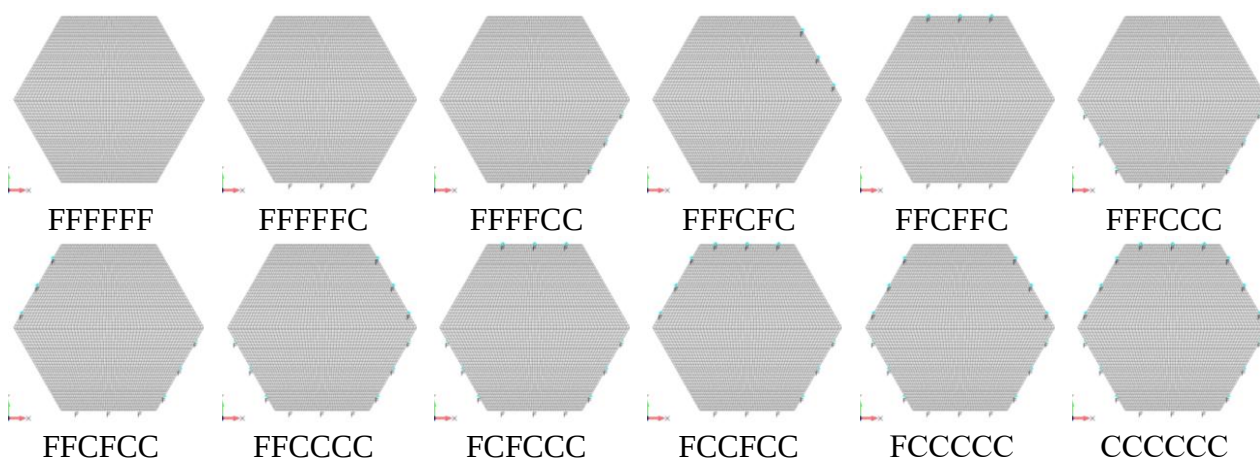


Рис. 3.58. Варіанти закріплення шестикутної пластини

Для встановлення залежності частоти від накладених граничних умов були введені коефіцієнти граничних умов, отримані в результаті ділення відповідної частоти закріпленої пластинки на відповідну частоту пластини з вільними краями, отримані коефіцієнти представлені в нижній частині таблиці 3.46.

Таблиця 3.46

Частоти вільних коливань шестикутної пластини з різними граничними умовами

Form	$f, \text{Гц}$											
	FFFFFF	FFFFFC	FFFFCC	FFFCFC	FFCFCC	FFCFCF	FFCCFC	FFCCFF	FCFCFC	FCCFCF	FCCCFCC	CCCCCC
1	108,22	19,35	28,72	48,40	98,36	48,60	99,45	99,67	190,44	191,12	203,27	221,05
2	108,22	47,07	79,08	138,90	99,65	139,03	195,98	210,92	307,96	300,99	339,29	457,72
3	185,76	103,76	154,36	183,42	202,69	195,86	308,01	309,18	370,47	391,79	455,34	458,08
4	230,65	175,36	202,19	304,46	302,18	315,43	330,49	421,27	491,82	452,42	517,21	746,12
5	273,69	188,35	290,73	337,27	316,91	385,90	449,11	471,82	530,09	564,53	716,16	746,78
6	410,74	295,34	397,90	385,06	392,05	433,45	501,93	622,59	718,99	695,52	771,48	851,38
7	410,99	363,34	411,03	497,01	484,37	547,08	629,62	729,06	769,02	784,90	865,70	1040,43
8	435,66	409,91	455,39	542,31	582,30	662,24	707,94	744,36	873,31	871,81	932,85	1139,42
9	435,72	422,25	626,16	661,93	654,08	743,82	766,39	872,67	890,15	887,02	1152,82	1288,33
10	685,25	540,39	692,22	720,45	714,76	746,60	876,37	1013,22	1046,45	1058,51	1166,74	1290,11
Form	$\frac{f_{FFFFFC}}{f_{FFFFFF}}$	$\frac{f_{FFFFCC}}{f_{FFFFFF}}$	$\frac{f_{FFFCFC}}{f_{FFFFFF}}$	$\frac{f_{FFCFCC}}{f_{FFFFFF}}$	$\frac{f_{FCCFCF}}{f_{FFFFFF}}$	$\frac{f_{FCCCFCC}}{f_{FFFFFF}}$	$\frac{f_{FCFCFC}}{f_{FFFFFF}}$	$\frac{f_{FCCFCF}}{f_{FFFFFF}}$	$\frac{f_{FCCCFCC}}{f_{FFFFFF}}$	$\frac{f_{FCCCFCC}}{f_{FFFFFF}}$	$\frac{f_{FCCCFCC}}{f_{FFFFFF}}$	$\frac{f_{CCCCCC}}{f_{FFFFFF}}$
1	0,18	0,27	0,45	0,91	0,45	0,92	0,92	1,76	1,77	1,88	2,04	
2	0,43	0,73	1,28	0,92	1,28	1,81	1,95	2,85	2,78	3,14	4,23	
3	0,56	0,83	0,99	1,09	1,05	1,66	1,66	1,99	2,11	2,45	2,47	
4	0,76	0,88	1,32	1,31	1,37	1,43	1,83	2,13	1,96	2,24	3,23	
5	0,69	1,06	1,23	1,16	1,41	1,64	1,72	1,94	2,06	2,62	2,73	
6	0,72	0,97	0,94	0,95	1,06	1,22	1,52	1,75	1,69	1,88	2,07	
7	0,88	1,00	1,21	1,18	1,33	1,53	1,77	1,87	1,91	2,11	2,53	
8	0,94	1,05	1,24	1,34	1,52	1,62	1,71	2,00	2,00	2,14	2,62	
9	0,97	1,44	1,52	1,50	1,71	1,76	2,00	2,04	2,04	2,65	2,96	
10	0,79	1,01	1,05	1,04	1,09	1,28	1,48	1,53	1,54	1,70	1,88	

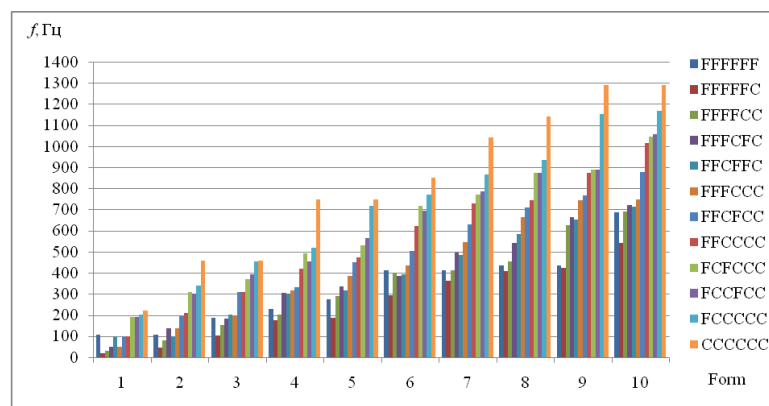


Рис. 3.59. Частоти вільних коливань шестикутної пластини з різними граничними умовами

Аналізуючи дані таблиці 3.46 та гістограми (рис. 3.59) можна спостерігати, що частоти шестикутної пластини з вільними краями не є самими низькими в порівнянні з відповідними частотами при інших варіантах закріплення, найнижчими є частоти пластинки з жорстко закріпленням одним торцем. Спостерігається мале відхилення, в межах до 1%, між першими частотами для двох пар варіантів закріплення для FFFCFC і FFFCCC та для FCFCFC і FCCFCF.

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом

закріплення (FFFFFF) представлені на рис. 3.60.

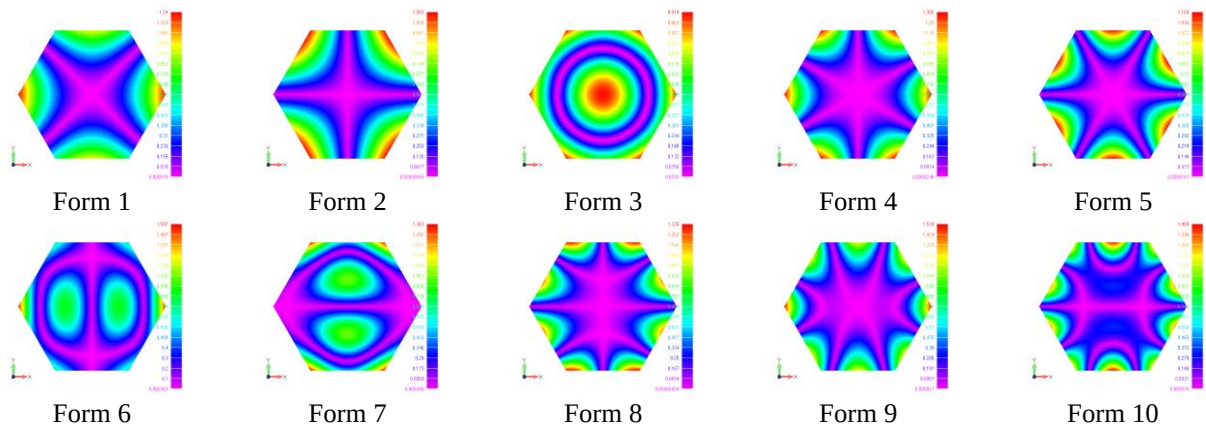


Рис. 3.60. Форми коливань шестикутної пластини (FFFFFF)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FFFFFC) представлені на рис. 3.61.

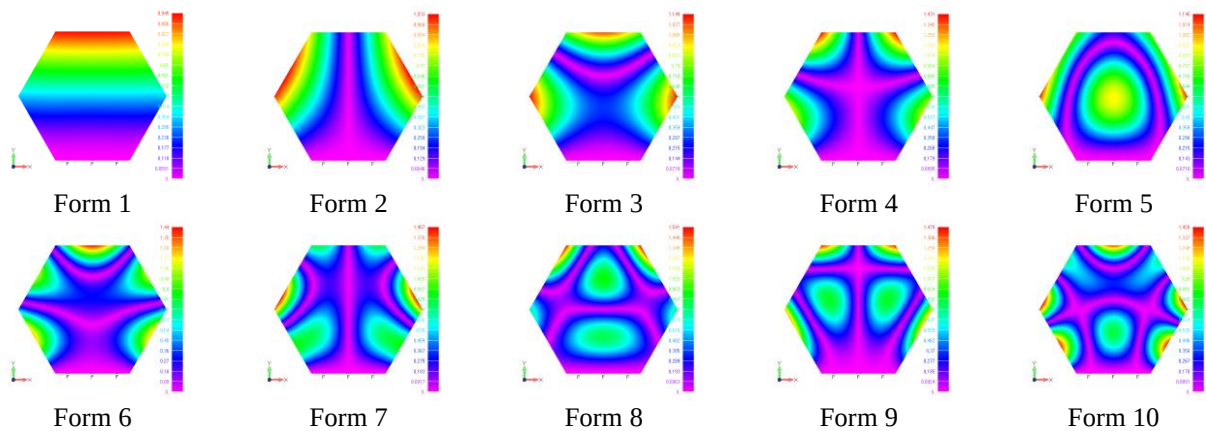


Рис. 3.61. Форми коливань шестикутної пластини (FFFFFC)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FFFFCC) представлені на рис. 3.62.

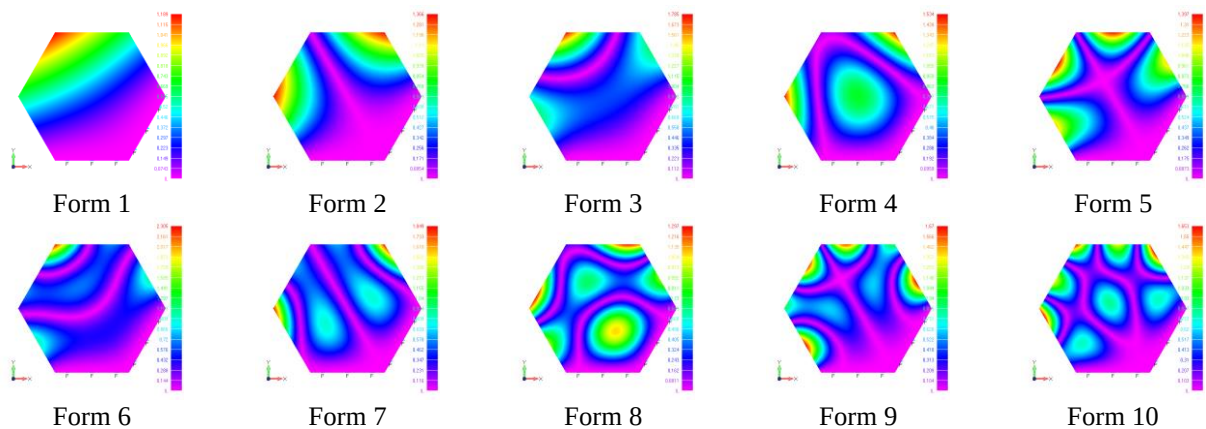


Рис. 3.62. Форми коливань шестикутної пластини (FFFFCC)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FFFCFC) представлені на рис. 3.63.

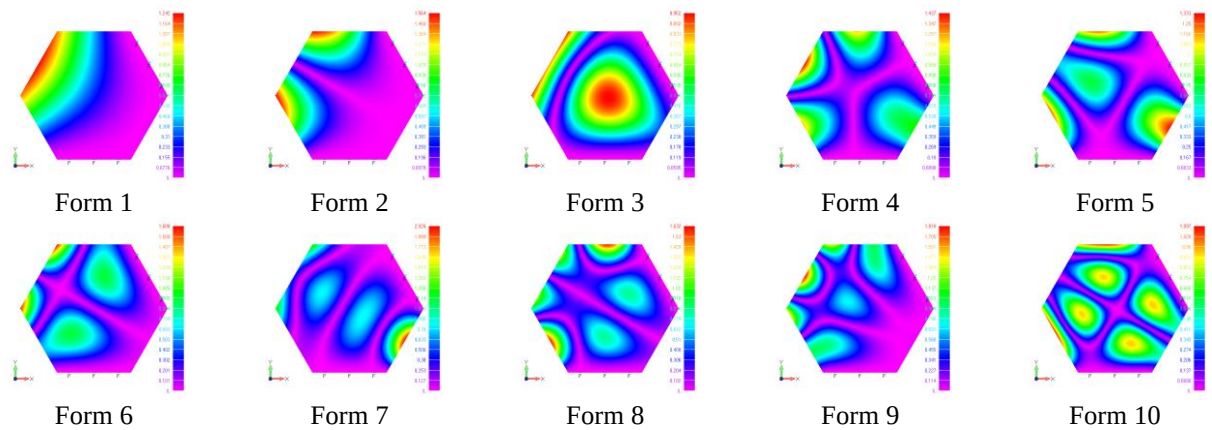


Рис. 3.63. Форми коливань шестикутної пластини (FFFCFC)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FFCFFC) представлені на рис. 3.64.

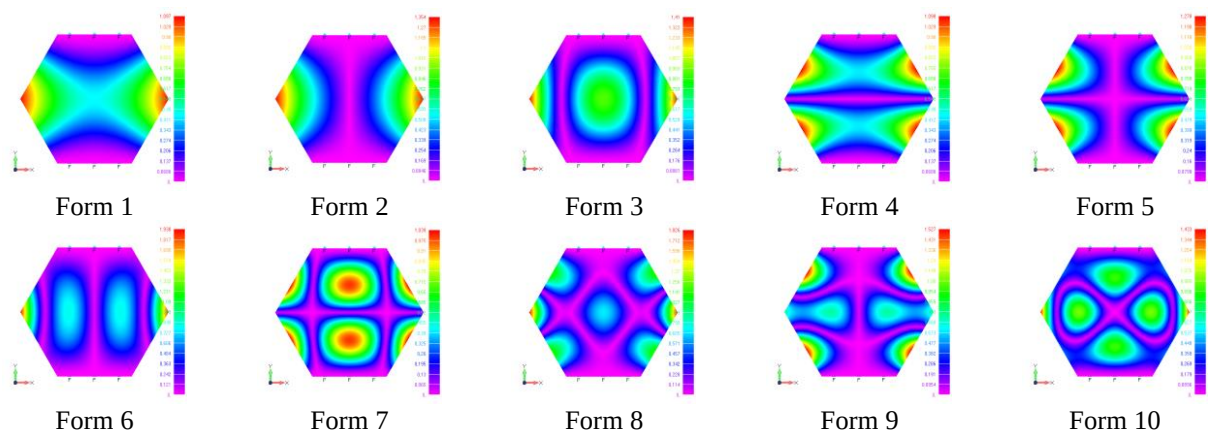


Рис. 3.64. Форми коливань шестикутної пластини (FFCFFC)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FFFCFC) представлені на рис. 3.65.

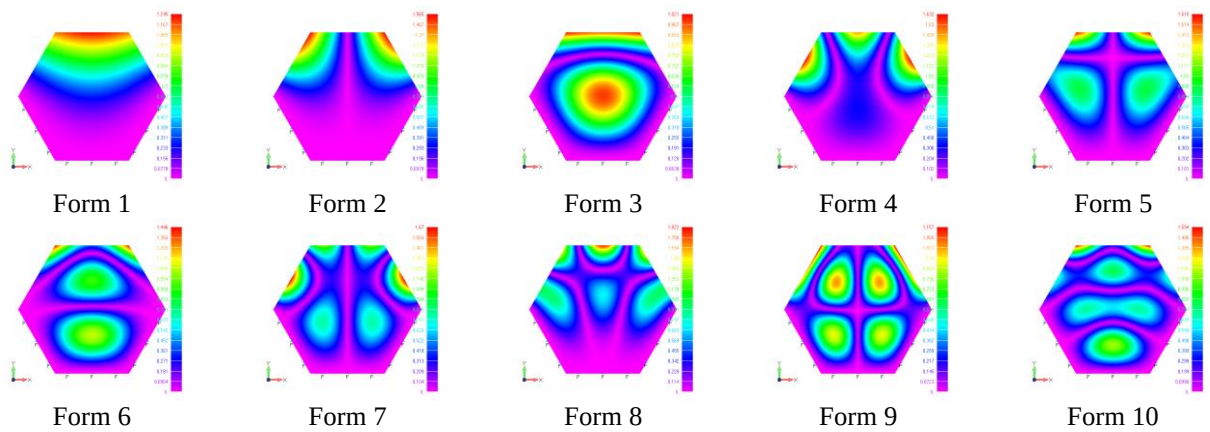


Рис. 3.65. Форми коливань шестикутної пластини (FFFCCC)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FFCFCC) представлені на рис. 3.66.

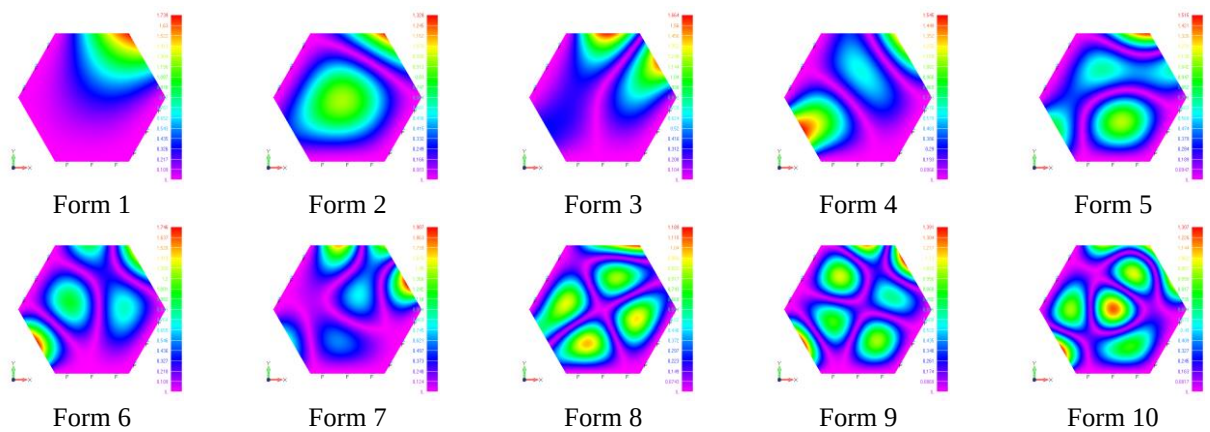


Рис. 3.66. Форми коливань шестикутної пластини (FFCFCC)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FFCCCC) представлені на рис. 3.67.

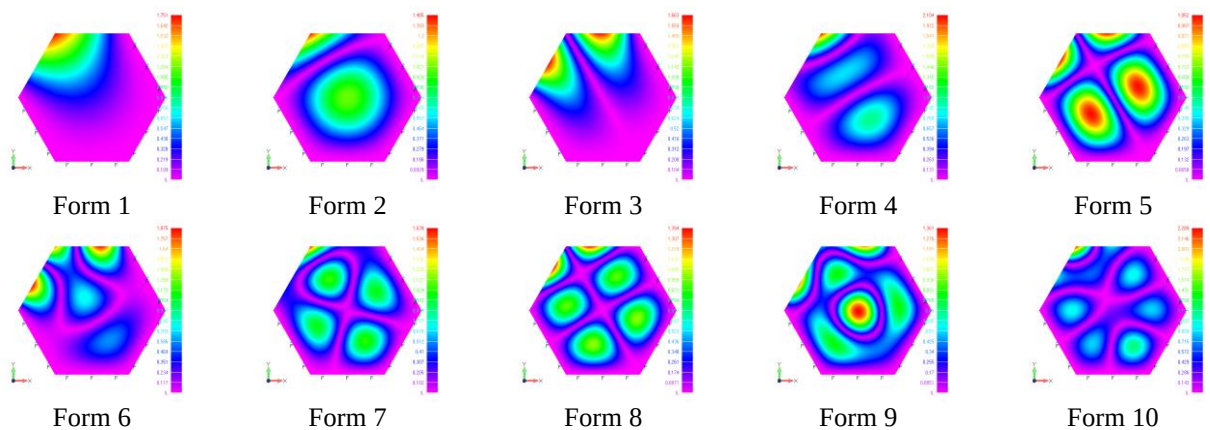


Рис. 3.67. Форми коливань шестикутної пластини (FFCCCC)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FCFCCC) представлені на рис. 3.68.

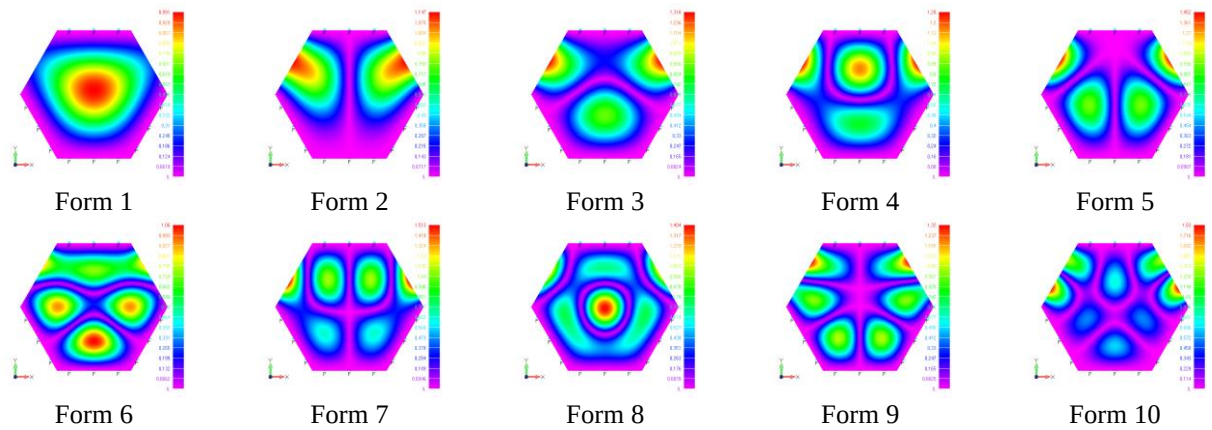


Рис. 3.68. Форми коливань шестикутної пластини (FCFCCC)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FCCFCC) представлені на рис. 3.69.

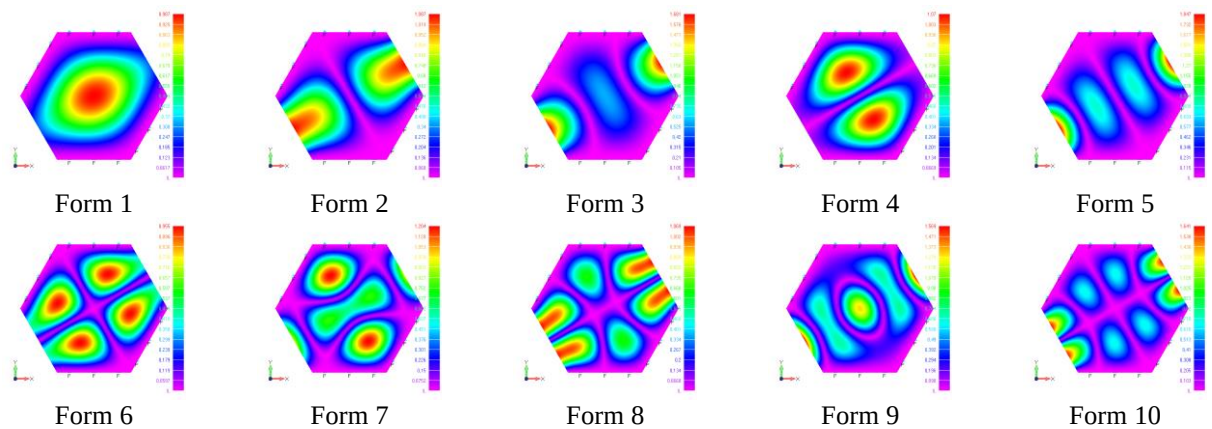


Рис. 3.69. Форми коливань шестикутної пластини (FCCFCC)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FCCCCC) представлені на рис. 3.70.

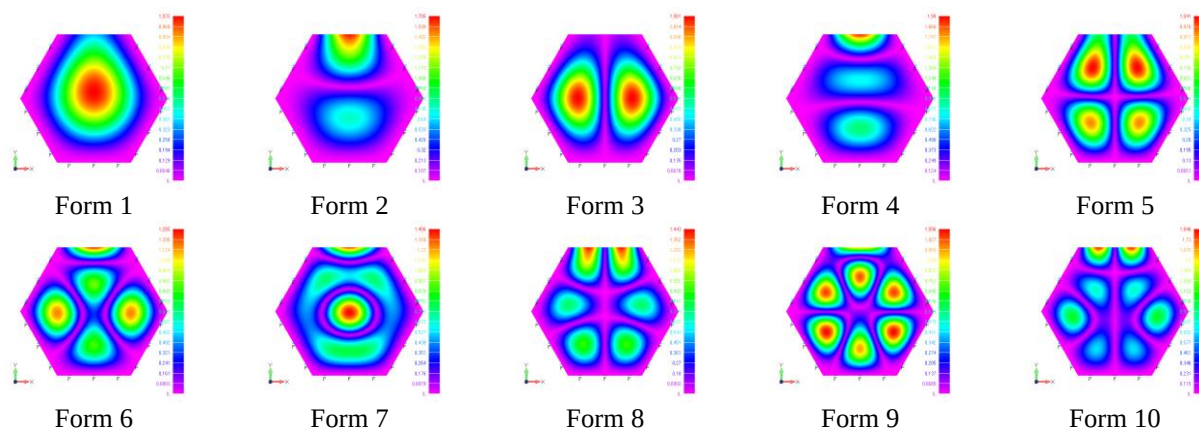


Рис. 3.70. Форми коливань шестикутної пластини (FCCCCC)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (CCCCCC) представлені на рис. 3.71.

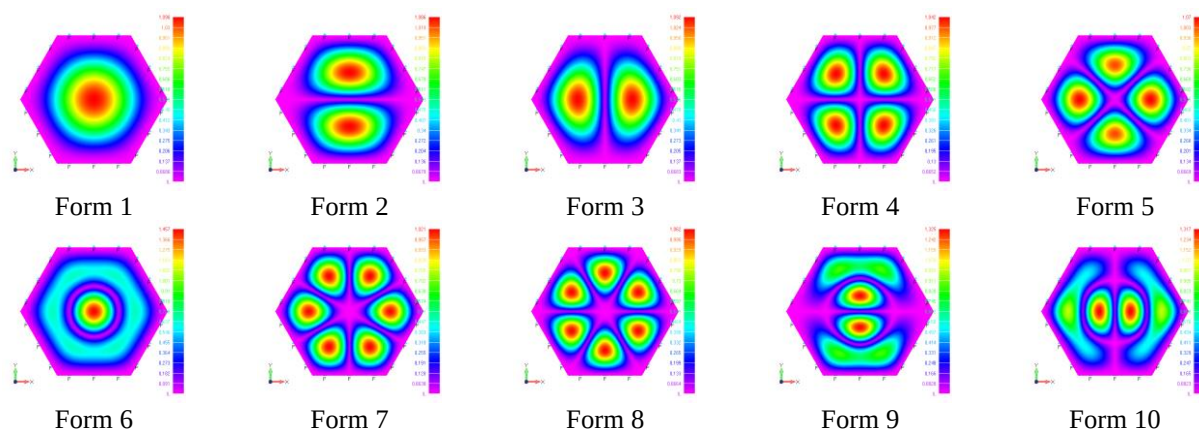


Рис. 3.71. Форми коливань шестикутної пластини (CCCCCC)

Для деяких способів закріплення можна встановити однакові форми коливань, наприклад, Form 2 для (FFFFFC), Form 2 для (FFFFCC), Form 2 для (FFFCFC), Form 2 для (FFFCFC), Form 3 для (FFCFCC) та Form 3 для (FFCCCC).

3.6.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань шестикутних пластин різної товщини

Проводились розрахунки частот вільних коливань алюмінієвих шестикутних пластин з вільними (FFFFFF) краями (рис. 3.58) з параметрами: сторона пластини $a = 0,24\text{ м}$, співвідношення товщини пластини до її сторони h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/8, 1/6, 1/5.

Розраховані частоти для шестикутних пластини з вільними краями (FFFFFF) представлені в таблиці 3.47.

Таблиця 3.47

Частоти вільних коливань шестикутних пластин (FFFFFF) різної товщини

Form	$f, \text{Гц}$										
	1/240	1/120	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5
1	27,10	54,17	108,22	215,91	322,8	428,76	533,58	637,2	790,13	1036,72	1225,30
2	27,10	54,17	108,22	215,92	322,81	428,78	533,65	637,31	790,22	1036,96	1225,92
3	46,49	92,96	185,76	370,9	554,97	737,41	917,25	1094,95	1356,26	1772,27	2084,67
4	57,89	115,65	230,65	458,46	681,86	900,6	1114,49	1322,34	1622,59	2090,96	2435,04
5	68,54	137,04	273,69	545,88	815,41	1081,17	1341,51	1596,83	1968,3	2548,42	2973,61
6	102,97	205,83	410,74	817,8	1218,62	1610,69	1990,22	2358,7	2887,09	3685,47	4246,01
7	103,00	205,88	410,99	818,64	1219,86	1612,31	1993,34	2362,38	2889,94	3691,06	4258,69
8	109,39	218,52	435,66	865,38	1285,29	1693,56	2087,84	2467,23	3006,58	3818,61	4388,38
9	109,39	218,54	435,72	865,51	1285,39	1693,58	2088,14	2467,77	3007,13	3820,09	4392,22
10	172,26	344,04	685,25	1358,21	2010,2	2636,62	3232,35	3796,7	4581,46	5717,00	6477,74

Перші десять форм коливань тонкої шестикутної пластини з вільними краями (FFFFFF) при $h/a=1/60$ наведено на рис. 3.60, форми поперечних коливань є однаковими для всіх розглянутих товщин пластин.

Перші десять частот планарних коливань шестикутної пластини з вільними краями (FFFFFF) зі співвідношеннями $h/a=1/240$ і $h/a=1/5$ представлені в таблиці 3.48, де ε – відхилення між частотами у відсотках. Пошук перших десяти планарних форм коливань для пластин зі співвідношенням $h/a=1/5$ відбувався в діапазоні частот від 3 до 26 частоти та для пластин зі співвідношенням $h/a=1/240$ в діапазоні частот від 47 до 346 частоти. Перші десять форм планарних коливань шестикутної пластини (FFFFFF) зі співвідношенням $h/a=1/5$ представлені на рис. 3.72.

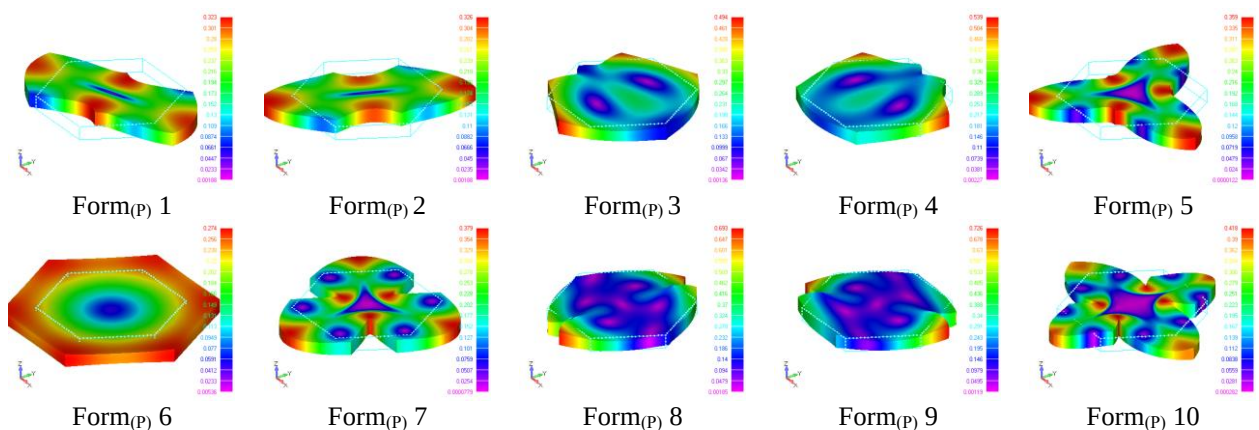


Рис. 3.72. Форми планарних коливань шестикутної пластини (FFFFFF) при $h/a=1/5$

Частоти планарних коливань шестикутних пластин (FFFFFF) різної товщини

Form(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$	Form(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$
1	5367,22	5367,12	0,00	6	8121,13	8096,89	0,30
2	5367,22	5367,14	0,00	7	8465,13	8461,84	0,04
3	6128,35	6124,49	0,06	8	9182,99	9169,35	0,15
4	6128,36	6124,53	0,06	9	9183,07	9169,61	0,15
5	7984,31	7983,21	0,01	10	10798,79	10792,49	0,06

3.7. Результати та висновки

1. Проведено аналіз вибору типу та розміру скінченного елемента для розрахунку МСЕ частот і форм вільних коливань пластин різної форми з урахуванням оптимального комп'ютерного часу розрахунку та збіжності отриманих результатів. Встановлено, що тонкі пластини краще розбивати plate-елементами або brick-елементами, а нетонкі та товсті пластин – tetra-елементами.
2. Розв'язано дві тестові задачі та проведено порівняння отриманих результатів з результатами отриманими експериментально та іншою реалізацією МСЕ. Розраховані частоти і форми вільних коливань мають малу розбіжність з результатами отриманими іншими авторами для обох тестових задач, що свідчить про доцільність використання запропонованого методу для розрахунків частот вільних коливань ізотропних пластин з різними граничними умовами.
3. Проведено розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних, чотирикутних, п'ятикутних та шестикутних пластин при різних варіантах жорсткого закріплення країв та вільних країв. Встановлено частотні коефіцієнти для різних варіантів жорстко закріплених країв всіх розглянутих пластин, які підтверджені при розрахунках пластин різної товщини при відповідних граничних умовах.
4. Отримано залежність частот вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин від величини кута при вершині. Максимальні значення частот відповідають пластині з кутом при вершині 60^0 , що свідчить про її високу

жорсткість, а мінімальні значення відповідають пластині з кутом при вершині 150° .

5. Для всіх багатокутних пластин з різними варіантами граничних умов представлено перші десять форм коливань, серед яких можна спостерігати подібність форми коливань як для різних пластин з однаковими граничними умовами так і для пластин однакової форми з різними граничними умовами.
6. Розраховано частоти вільних коливань багатокутних пластин з десяти різних матеріалів, в результаті чого встановлені залежності частоти вільних коливань від фізико-механічних властивостей матеріалу пластини у вигляді частотних коефіцієнтів ізотропних матеріалів, які чисельно дорівнюють співвідношенню фізико-механічних властивостей відповідних матеріалів.
7. Проведено розрахунок багатокутних пластин різної товщини в межах співвідношень товщини пластини до її сторони h/a від $1/240$ до $1/5$. Встановлено частотні коефіцієнти багатокутних пластин різної товщини, які чисельно дорівнюють співвідношенню відповідних товщин пластин. Визначенні планарні форми коливань, які з'являються на майже однаковій частоті при різних товщинах пластин однакової форми з однаковими граничними умовами, тобто планарні форми коливань та відповідні їм частоти не залежать від товщини пластини, що дає можливість їх прогнозувати. Для тонких пластин планарні форми коливань відповідають більш високим частотам.

Розділ 4

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОКУТНИХ ПЛАСТИН З ОТВОРОМ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

В даному розділі методом скінченних елементів проведено розрахунок частот та форм вільних коливань багатокутних пластин з отвором при різних граничних умовах. Встановлено коефіцієнти для різних варіантів жорстко закріплених країв та отвору. Досліджено вплив положення круглого отвору та величини його радіусу на розподіл частот та форм вільних коливань пластини.

4.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин з отворами

За допомогою FEMAP було побудовано геометричну модель пластини [274, 275] у вигляді правильного трикутника зі стороною $a = 207,846 \text{ мм}$, товщиною $h = 2 \text{ мм}$ з круговим отвором в центрі радіусом $r = 6 \text{ мм}$ та без отвору. Формою пластини є рівносторонній трикутник в який можна вписати круг радіусом $r_T = 60 \text{ мм}$. Як матеріал пластини був вибраний алюміній. Пластина досліджувалась при різних варіантах жорстко закріплених країв (C_e) та отвору (C_h) і вільних країв (F_e) та отвору (F_h) (рис. 4.1). Скінченно-елементна розбивка проводилась tetra-елементами розміром сторони h .

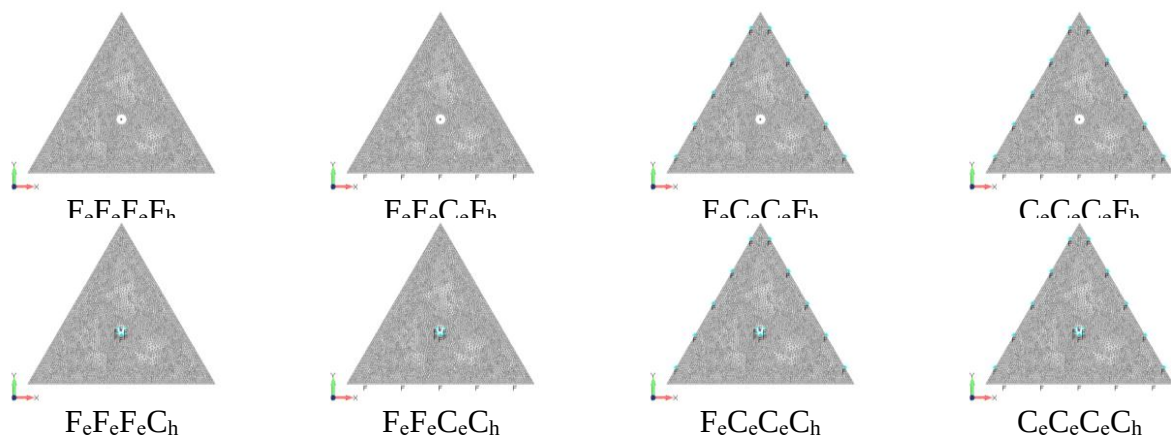


Рис. 4.1. Варіанти закріплення трикутної пластини з отвором

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань трикутних пластин правильної форми з отвором та без з різними варіантами жорсткого закріплення. Частоти вільних коливань трикутних пластин з вільними краями представлені в таблиці 4.1 та на гістограмі (рис. 4.2).

Таблиця 4.1

Частоти вільних коливань трикутних пластин з вільними краями

Form	$f, \text{Гц}$			Form	$f, \text{Гц}$		
	$F_e F_e F_e$	$F_e F_e F_e F_h$	$F_e F_e F_e C_h$		$F_e F_e F_e$	$F_e F_e F_e F_h$	$F_e F_e F_e C_h$
1	393,57	390,45	255,02	6	1035,44	1035,28	1039,86
2	406,64	404,19	510,38	7	1323,71	1305,60	1039,93
3	406,64	404,20	510,43	8	1836,20	1834,87	1829,95
4	966,35	964,24	787,64	9	1839,69	1837,61	1901,07
5	966,36	964,24	1035,73	10	1839,71	1837,63	1901,08

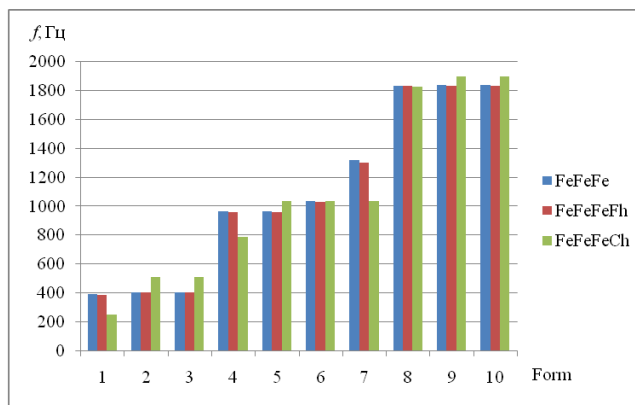


Рис. 4.2. Частоти вільних коливань трикутних пластин з вільними краями

Порівняння 1-5 форм коливань трикутних пластин з отвором з вільними краями представлені на рис. 4.3.

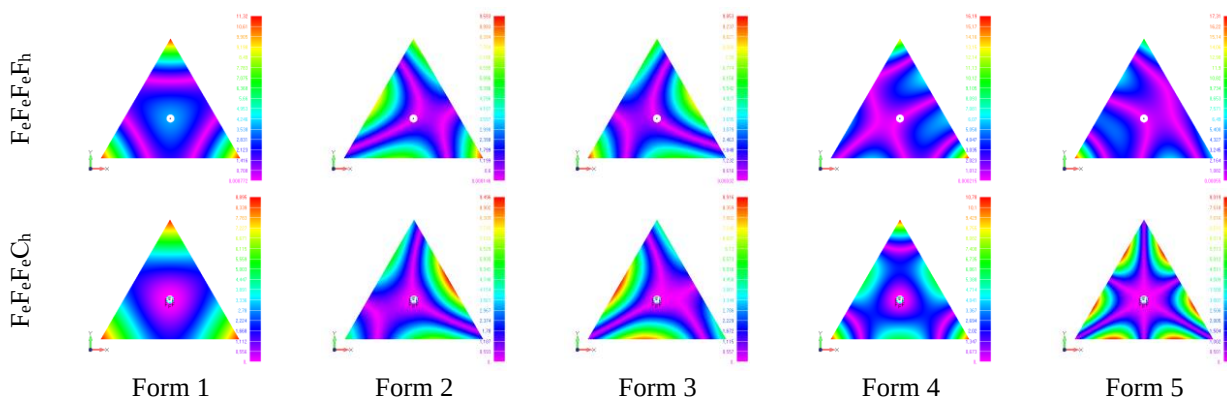


Рис. 4.3. Порівняння 1-5 форм коливань трикутних пластин з отвором з вільними краями

Порівняння 6-10 форм коливань трикутних пластин з отвором з вільними краями представлені на рис. 4.4.

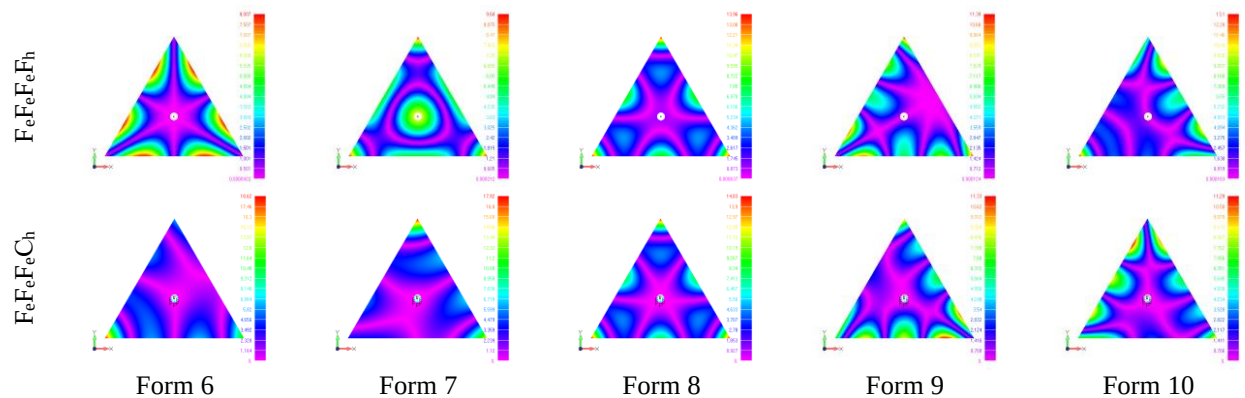


Рис. 4.4. Порівняння 6-10 форм коливань трикутних пластин з отвором з вільними краями

Частоти вільних коливань трикутних пластин з жорстко закріпленим одним краєм та вільними іншими краями представлені в таблиці 4.2 та на гістограмі (рис. 4.5).

Таблиця 4.2

Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленим одним краєм

Form	f , Гц			Form	f , Гц		
	$F_e F_e C_e$	$F_e F_e C_e F_h$	$F_e F_e C_e C_h$		$F_e F_e C_e$	$F_e F_e C_e F_h$	$F_e F_e C_e C_h$
1	102,33	101,93	222,44	6	1234,54	1219,03	1928,06
2	398,83	396,75	539,26	7	1905,57	1904,13	1965,97
3	440,38	439,67	737,36	8	1907,46	1904,92	2652,20
4	1025,49	1022,59	1079,48	9	2286,56	2279,55	2691,55
5	1057,90	1056,97	1093,65	10	2370,33	2363,98	2756,17

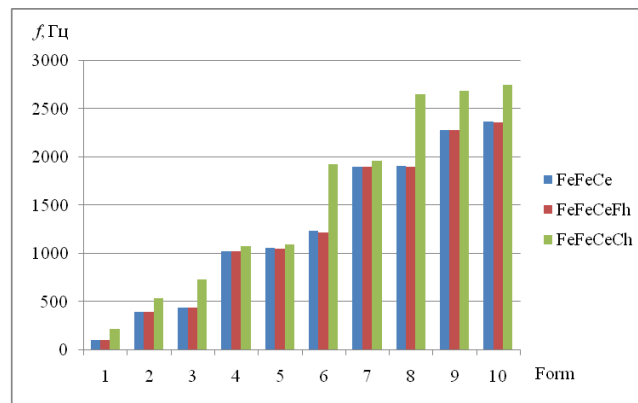


Рис. 4.5. Частоти вільних коливань трикутних пластин з жорстко закріпленим одним краєм

Порівняння 1-5 форм коливань трикутних пластин з отвором з жорстко закріпленим одним краєм та вільними іншими краями представлені на рис. 4.6.

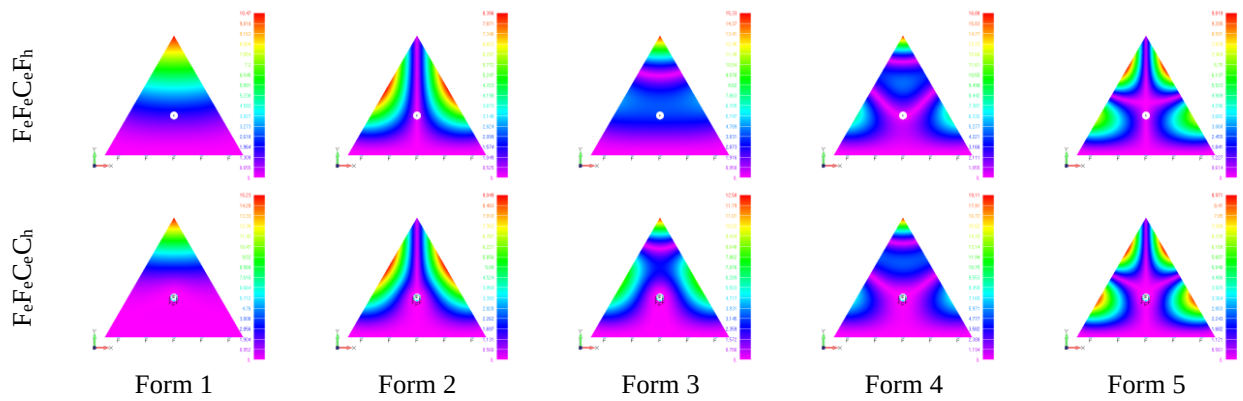


Рис. 4.6. Порівняння 1-5 форм коливань трикутних пластин з отвором з жорстко закріпленим одним краєм

Порівняння 6-10 форм коливань трикутних пластин з отвором з жорстко закріпленим одним краєм та вільними іншими краєм представлені на рис. 4.7.

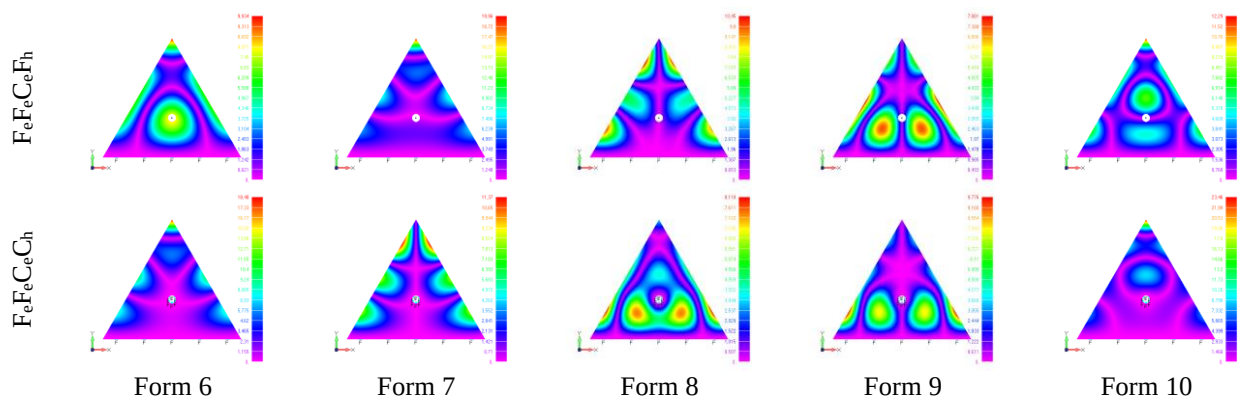


Рис. 4.7. Порівняння 6-10 форм коливань трикутних пластин з отвором з жорстко закріпленим одним краєм

Частоти вільних коливань трикутних пластин з жорстко закріпленими двома краями та одним вільним краєм представлені в таблиці 4.3 та на гістограмі (рис. 4.8).

Таблиця 4.3

Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленими двома краями

Form	$f, \text{Гц}$			Form	$f, \text{Гц}$		
	$F_e C_e C_e$	$F_e C_e C_e F_h$	$F_e C_e C_e C_h$		$F_e C_e C_e$	$F_e C_e C_e F_h$	$F_e C_e C_e C_h$
1	458,91	458,55	677,01	6	2268,81	2262,62	2719,09
2	1096,14	1094,07	1136,97	7	3139,98	3135,23	3198,44
3	1172,04	1160,01	2018,56	8	3423,98	3403,42	4112,24
4	1975,70	1973,50	2636,53	9	3734,42	3714,05	4149,27
5	2228,08	2220,90	2660,32	10	3749,99	3727,50	4365,72

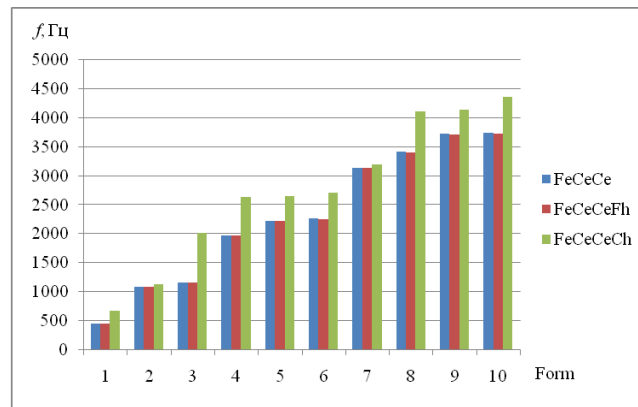


Рис. 4.8. Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленими двома краями

Порівняння 1-5 форм коливань трикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома краями та одним вільним краєм представлені на рис. 4.9.

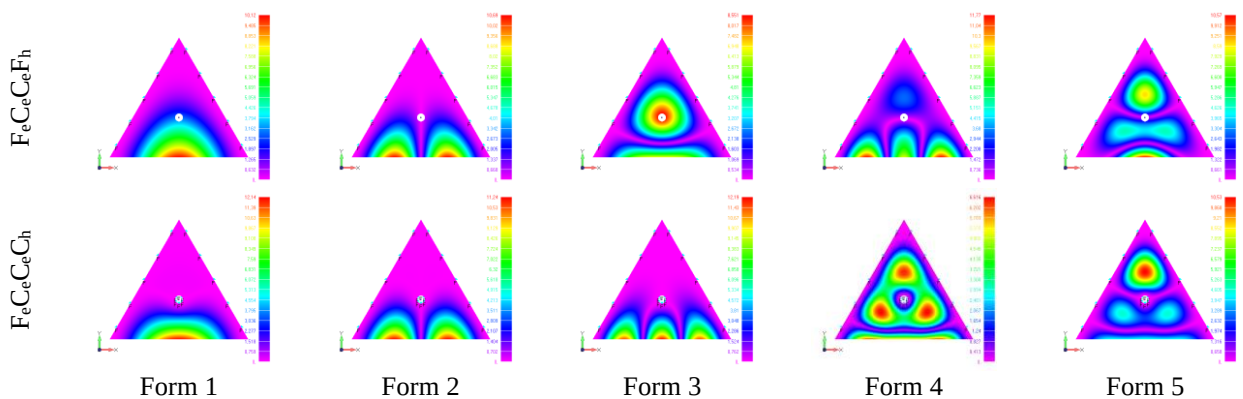


Рис. 4.9. Порівняння 1-5 форм коливань пластин з отвором з жорстко закріпленими двома краями

Порівняння 6-10 форм коливань трикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома краями та одним вільним краєм представлені на рис. 4.10.

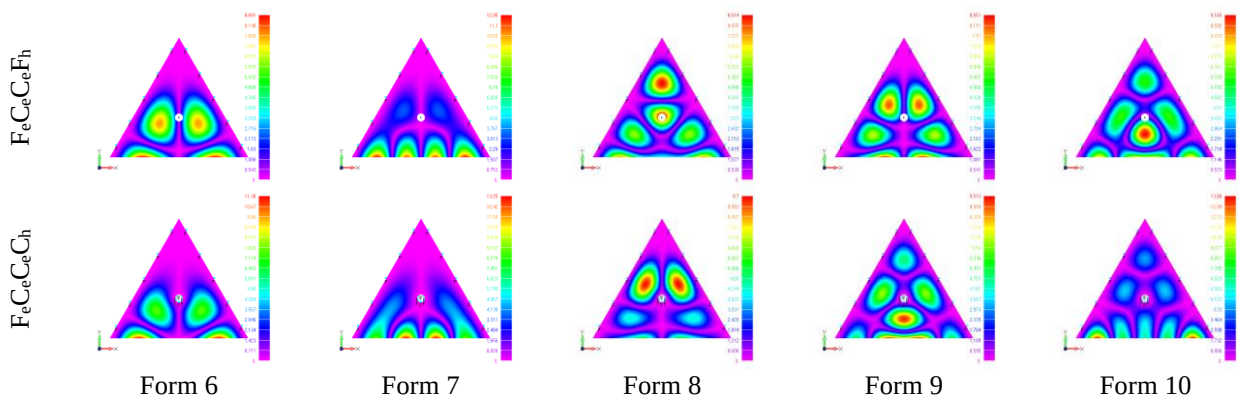


Рис. 4.10. Порівняння 6-10 форм коливань пластин з отвором з жорстко закріпленими двома краями

Частоти вільних коливань трикутних пластин з жорстко закріпленими трьома краями представлені в таблиці 4.4 та на гістограмі (рис. 4.11).

Таблиця 4.4

Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленими двома краями

Form	$f, \text{Гц}$			Form	$f, \text{Гц}$		
	CeCeCe	CeCeCeFh	CeCeCeCh		CeCeCe	CeCeCeFh	CeCeCeCh
1	1144,84	1137,67	2638,85	6	3629,25	3605,32	4529,04
2	2181,28	2174,50	2659,16	7	5030,21	5000,88	5311,51
3	2181,34	2174,61	2659,71	8	5030,33	5001,05	5311,58
4	3401,14	3377,86	4061,68	9	5474,08	5444,18	5478,40
5	3629,10	3605,24	4062,06	10	5479,92	5466,53	6846,71

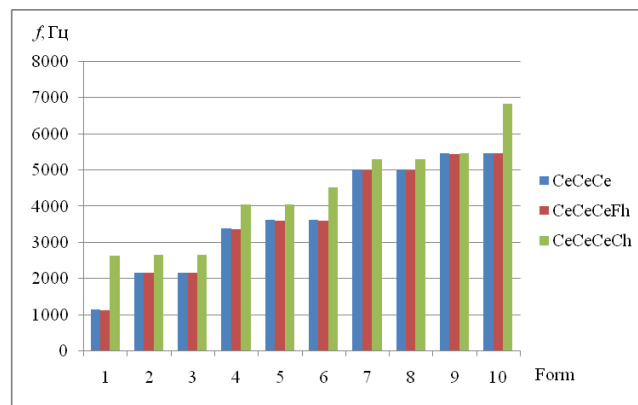


Рис. 4.11. Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленими трьома краями

Порівняння 1-5 форм коливань трикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими трьома краями представлені на рис. 4.12.

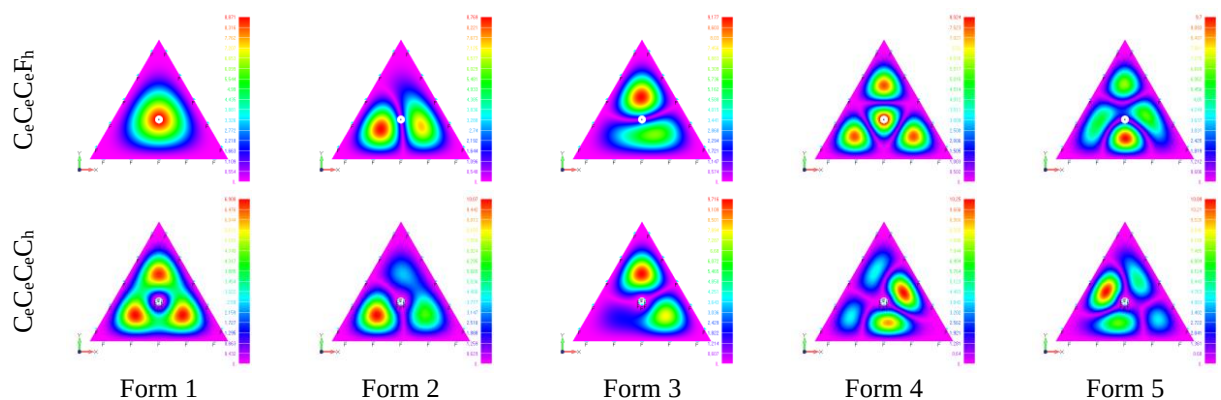


Рис. 4.12. Порівняння 1-5 форм коливань пластин з отвором з жорстко закріпленими трьома краями

Порівняння 6-10 форм коливань трикутних пластин з отвором з

жорстко закріпленими трьома краями представлені на рис. 4.13.

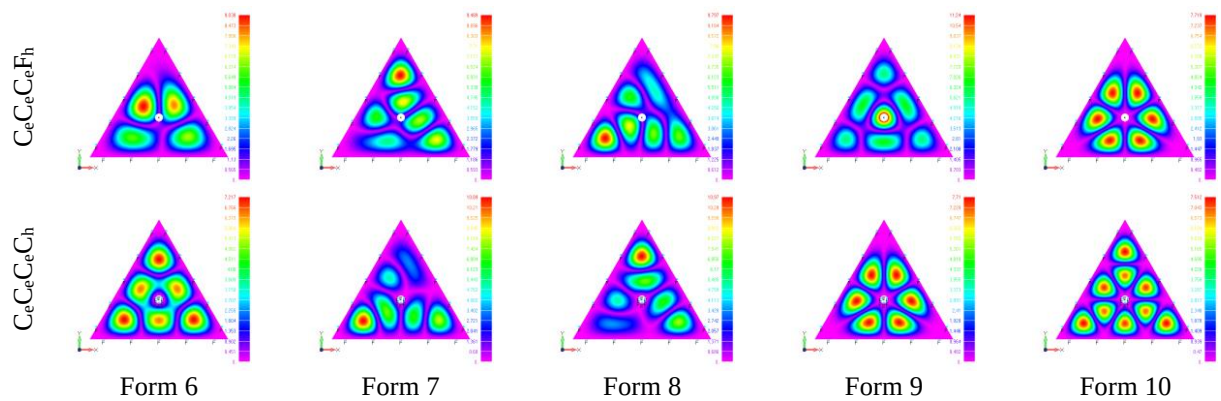


Рис. 4.13. Порівняння 6-10 форм коливань пластин з отвором з жорстко закріпленими трьома краями

Порівнюючи пластини без отвору і з отвором, на які не накладено граничні умови, спостерігається мале відхилення між частотами, яке не перевищують 1,5% для всіх розглянутих варіантів закріплення країв, а це означає, що при відношенні сторони трикутника до радіусу отвору, яке менше $1/35$, є можливість не враховувати наявності отвору при визначенні частот вільних коливань трикутних пластин будь-яким методом. Жорстке закріплення отвору значно впливає на зміну частоти, а саме, частота коливань пластини, закріпленої по отвору, при всіх вільних краях пластини суттєво знижується в порівнянні з пластиною без отвору і збільшується при всіх варіаціях закріплення країв.

Частоти трикутної пластини з вільними краями не є самими низькими в порівнянні з відповідними частотами при інших варіантах закріплення, проте із збільшенням кількості закріплених країв відповідні частоти зростають.

Для пластини з вільними краями та жорстко закріпленим отвором спостерігаються три поворотні форми коливання ($Form_{xyz}$) відносно вісей координат. Відповідні частоти поворотних форми коливань (рис. 4.14) не були враховані в таблиці 4.1, з метою представлення відповідних форм для порівняння з іншими пластинами з вільними краями. Для всіх пластин спостерігаються однакові форми з порушенням порядку формоутворення та деякою зміною вузлових ліній за рахунок жорсткого закріплення отвору.

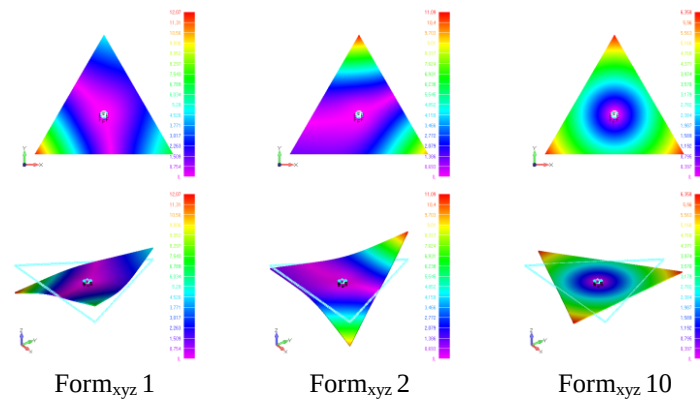


Рис. 4.14. Поворотні форми коливань відносно вісей координат пластини $F_e F_e F_e C_h$

Дослідимо коефіцієнти граничних умов таблиці 3.10 для трикутних пластин з отвором і без, поділивши відповідні частоти пластин з різними варіаціями жорсткого закріплення на відповідні частоти пластин з отвором і без з вільними краями. Отримані коефіцієнти граничних умов представлені в таблиці 4.5.

Коефіцієнти граничних умов таблиці 4.5 для трикутних пластин з незакріпленим отвором відповідають коефіцієнти граничних умов таблиці 3.10 для трикутних пластин без отвору, з чого можна зробити висновок, що наявність незакріпленого отвору не впливає на коефіцієнти граничних умов, в свою чергу при закріпленому отворі коефіцієнти суттєво відрізняються, зі збільшенням номеру частоти різниця між коефіцієнтами зменшується.

Таблиця 4.5

Коефіцієнти граничних для трикутних пластин з отвором

For m	$\frac{f_{F_e F_e C_c}}{f_{F_e F_e F_e}}$	$\frac{f_{F_e F_e C_c F_h}}{f_{F_e F_e F_e F_h}}$	$\frac{f_{F_e F_e C_c C_h}}{f_{F_e F_e F_e C_h}}$	$\frac{f_{F_e C_c C_c}}{f_{F_e F_e F_e}}$	$\frac{f_{F_e C_c C_c F_h}}{f_{F_e F_e F_e F_h}}$	$\frac{f_{F_e C_c C_c C_h}}{f_{F_e F_e F_e C_h}}$	$\frac{f_{C_c C_c C_c}}{f_{F_e F_e F_e}}$	$\frac{f_{C_c C_c C_c F_h}}{f_{F_e F_e F_e F_h}}$	$\frac{f_{C_c C_c C_c C_h}}{f_{F_e F_e F_e C_h}}$
1	0,26	0,26	0,87	1,17	1,17	2,65	2,91	2,91	10,35
2	0,98	0,98	1,06	2,70	2,71	2,23	5,36	5,38	5,21
3	1,08	1,09	1,44	2,88	2,87	3,95	5,36	5,38	5,21
4	1,06	1,06	1,37	2,04	2,05	3,35	3,52	3,50	5,16
5	1,09	1,10	1,06	2,31	2,30	2,57	3,76	3,74	3,92
6	1,19	1,18	1,85	2,19	2,19	2,61	3,51	3,48	4,36
7	1,44	1,46	1,89	2,37	2,40	3,08	3,80	3,83	5,11
8	1,04	1,04	1,45	1,86	1,85	2,25	2,74	2,73	2,90
9	1,24	1,24	1,42	2,03	2,02	2,18	2,98	2,96	2,88
10	1,29	1,29	1,45	2,04	2,03	2,30	2,98	2,97	3,60

Дослідимо вплив положення отвору на частоти та форми вільних коливань трикутної пластини з вільними краями та жорстко закріпленим отвором. Побудовано геометричну модель трикутної пластини зі стороною $a = 207,846 \text{ мм}$, товщиною $h = 2 \text{ мм}$ з отвором радіусом $r = 10 \text{ мм}$, положення отвору змінюється вздовж висоти трикутника з кроком $\Delta = 10 \text{ мм}$, починаючи з точки (O_5), яка є центром вписаного кола в трикутник.

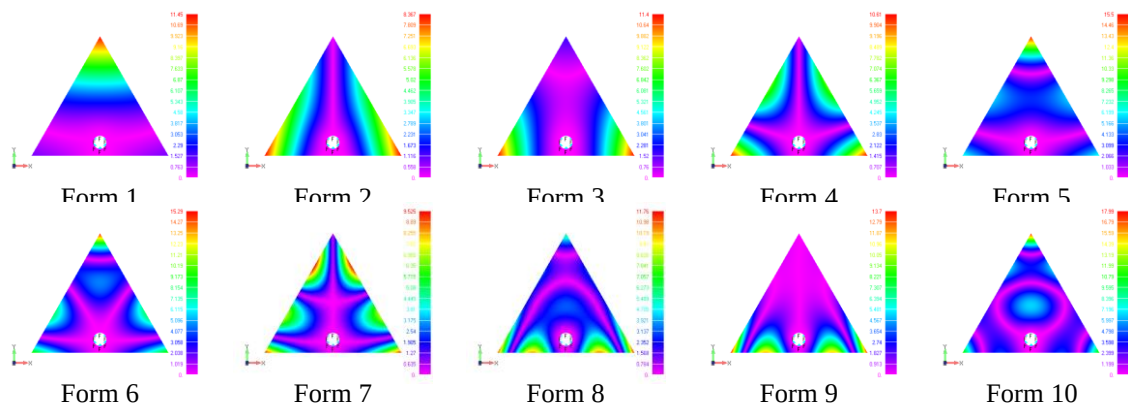
В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань трикутних пластин з різним розміщенням отвору, які представлено в таблиці 4.6.

Таблиця 4.6

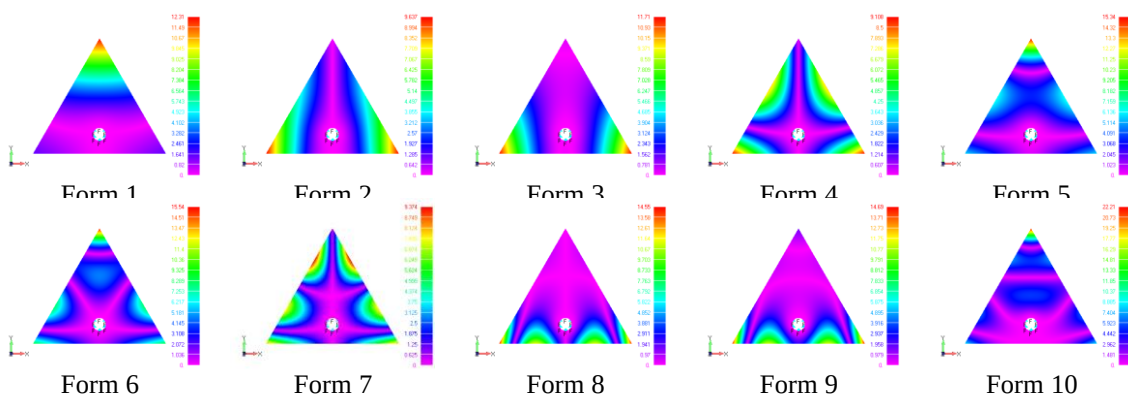
Частоти вільних коливань пластин з різним положенням отвору

Form	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7
1	122,39	142,88	167,07	196,06	226,44	204,33	184,17
2	229,06	253,55	260,59	247,82	226,46	222,35	193,00
3	286,07	287,21	284,13	276,86	268,56	297,32	363,10
4	436,51	435,49	453,00	500,16	572,89	498,30	453,27
5	509,48	556,32	606,20	630,76	573,08	664,39	749,56
6	988,40	985,97	972,43	893,69	848,75	851,64	833,75
7	1031,92	1040,58	1043,37	1040,94	1038,34	1030,83	998,60
8	1493,36	1384,04	1207,88	1067,83	1084,01	1049,28	1095,08
9	1507,80	1410,51	1247,00	1150,30	1084,11	1180,07	1350,01
10	1622,94	1754,87	1826,62	1838,66	1836,99	1839,04	1824,87
Form	O_8	O_9	O_{10}	O_{11}	O_{12}	O_{13}	O_{14}
1	161,66	133,83	110,46	91,33	75,63	62,62	51,63
2	166,46	151,11	137,48	125,41	114,52	104,51	95,00
3	427,64	416,33	409,48	405,60	403,36	402,10	401,33
4	461,12	600,74	663,81	595,86	528,86	466,95	410,91
5	775,86	737,52	705,19	659,92	617,63	579,62	545,66
6	792,99	749,12	826,77	987,93	987,58	986,98	986,11
7	988,00	987,58	987,84	1193,14	1304,05	1227,93	1141,42
8	1248,53	1535,38	1473,09	1381,23	1535,59	1437,67	1347,23
9	1550,82	1580,00	1705,29	1635,36	1555,24	1469,69	1403,06
10	1765,64	1736,48	1718,64	1649,08	1845,04	1841,50	1839,29

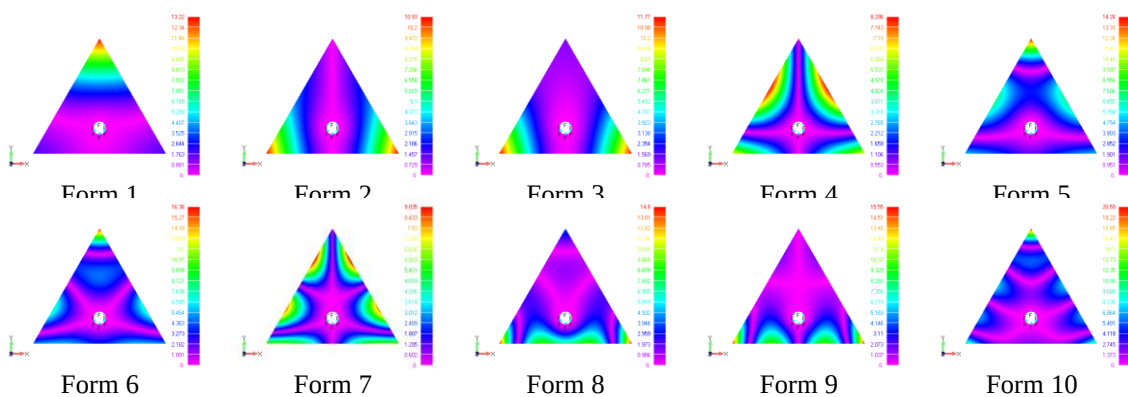
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим отвором в положенні O_1 представлені на рис. 4.15.

Рис. 4.15. Форми вільних коливань пластини з отвором O_1

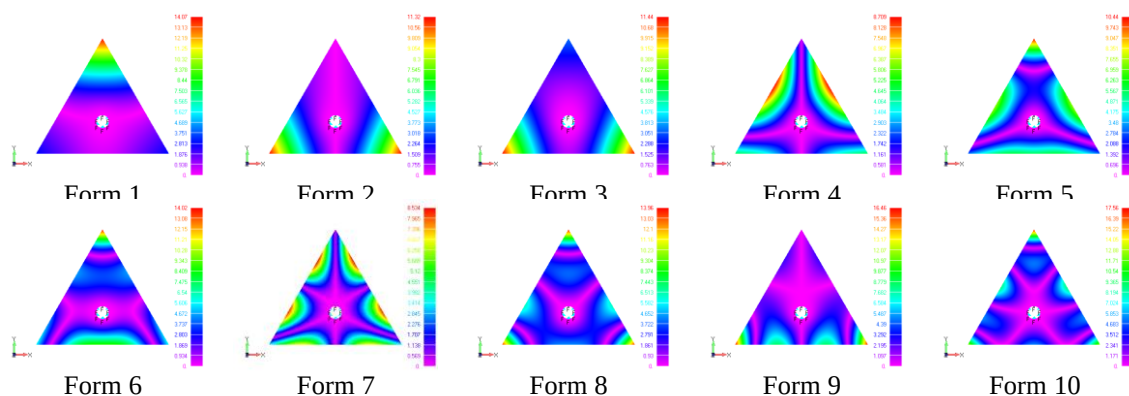
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_2 представлені на рис. 4.16.

Рис. 4.16. Форми вільних коливань пластини з отвором O_2

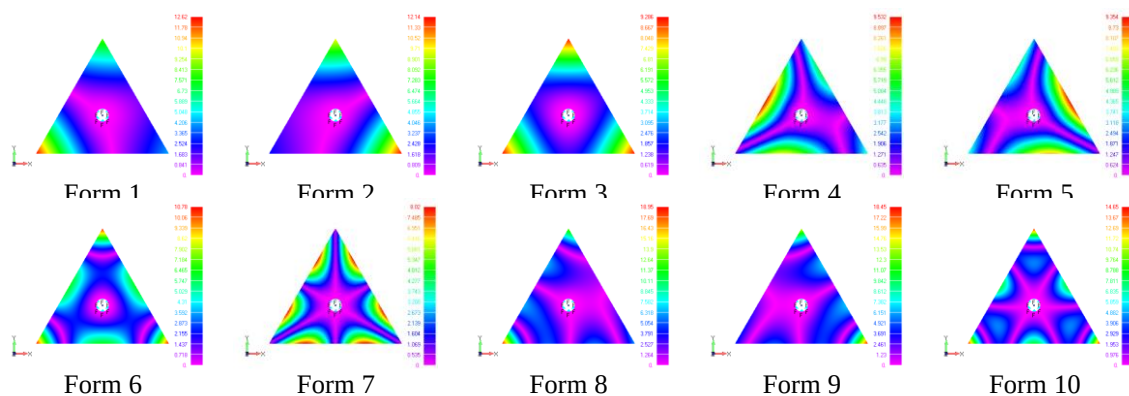
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_3 представлені на рис. 4.17.

Рис. 4.17. Форми вільних коливань пластини з отвором O_3

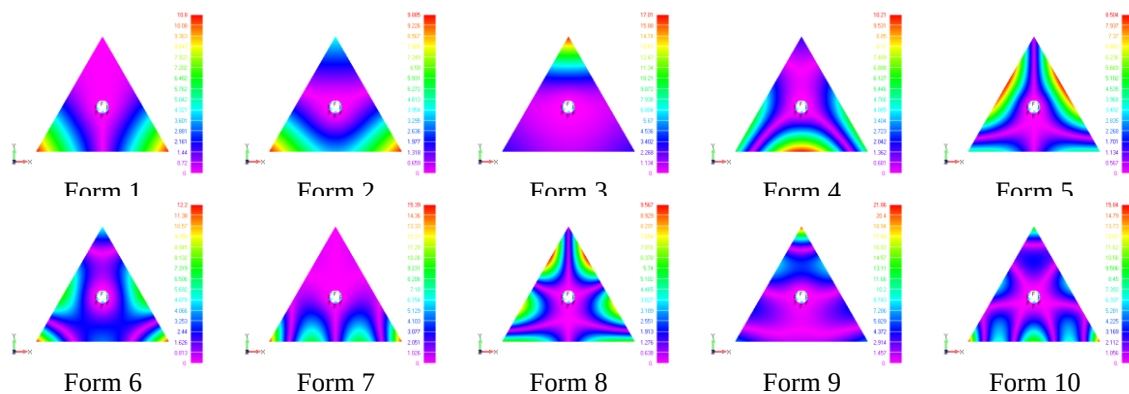
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_4 представлені на рис. 4.18.

Рис. 4.18. Форми вільних коливань пластини з отвором O_4

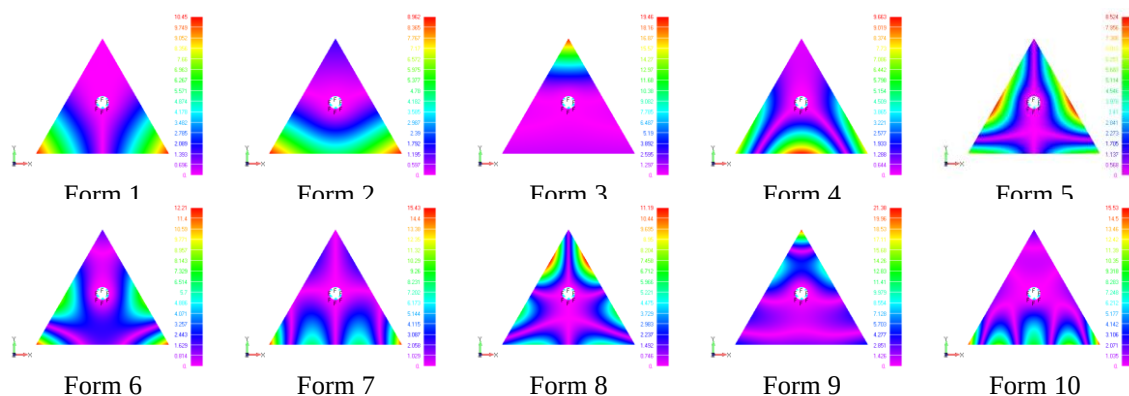
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_5 представлені на рис. 4.19.

Рис. 4.19. Форми вільних коливань пластини з отвором O_5

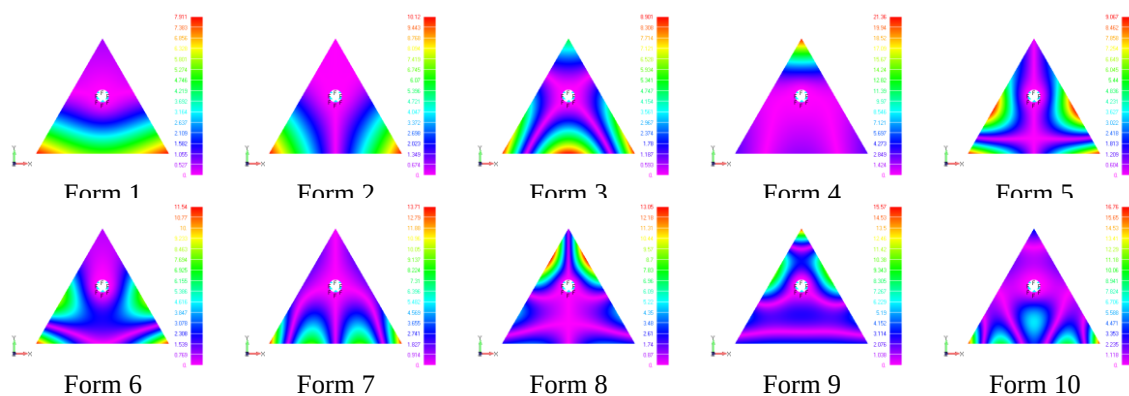
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_6 представлені на рис. 4.20.

Рис. 4.20. Форми вільних коливань пластини з отвором O_6

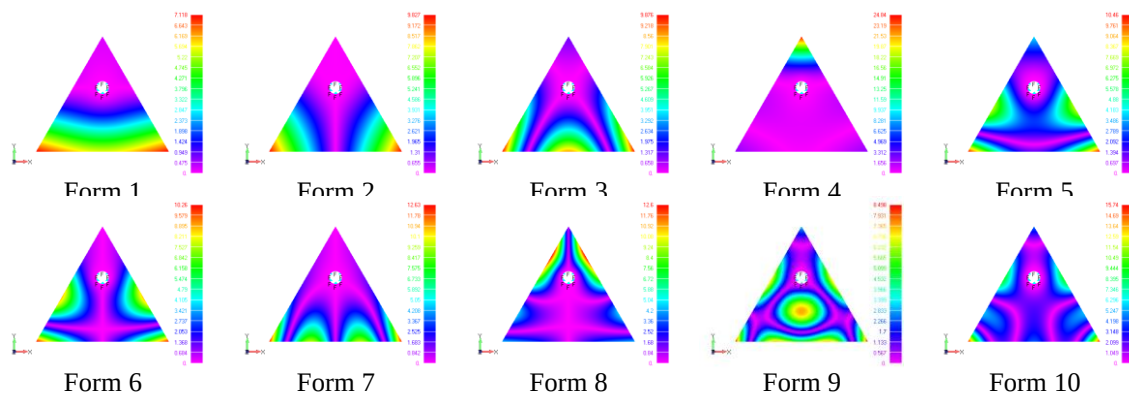
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_7 представлені на рис. 4.21.

Рис. 4.21. Форми вільних коливань пластини з отвором O_7

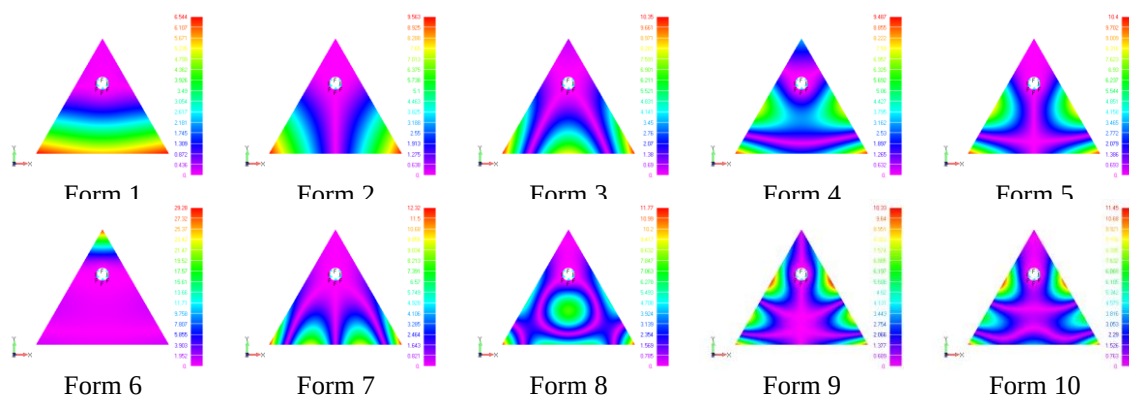
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_8 представлені на рис. 4.22.

Рис. 4.22. Форми вільних коливань пластини з отвором O_8

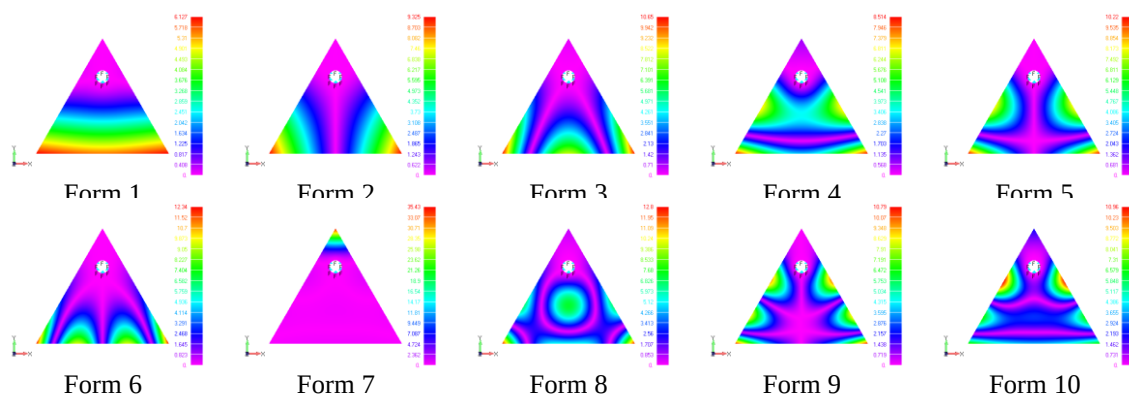
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_9 представлені на рис. 4.23.

Рис. 4.23. Форми вільних коливань пластини з отвором O_9

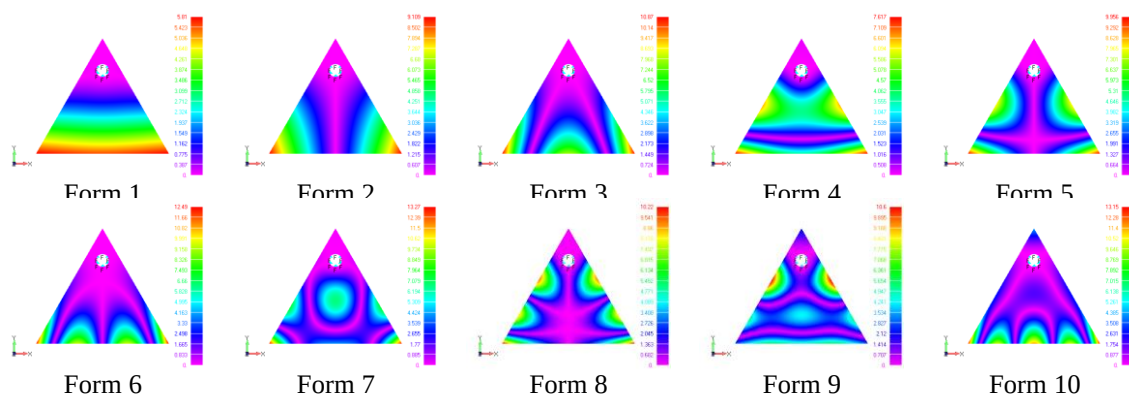
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_{10} представлені на рис. 4.24.

Рис. 4.24. Форми вільних коливань пластини з отвором O_{10}

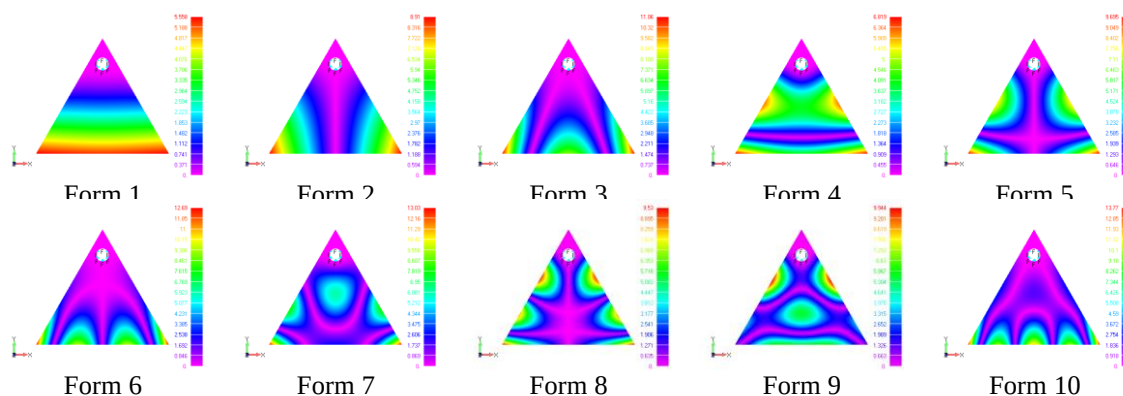
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_{11} представлені на рис. 4.25.

Рис. 4.25. Форми вільних коливань пластини з отвором O_{11}

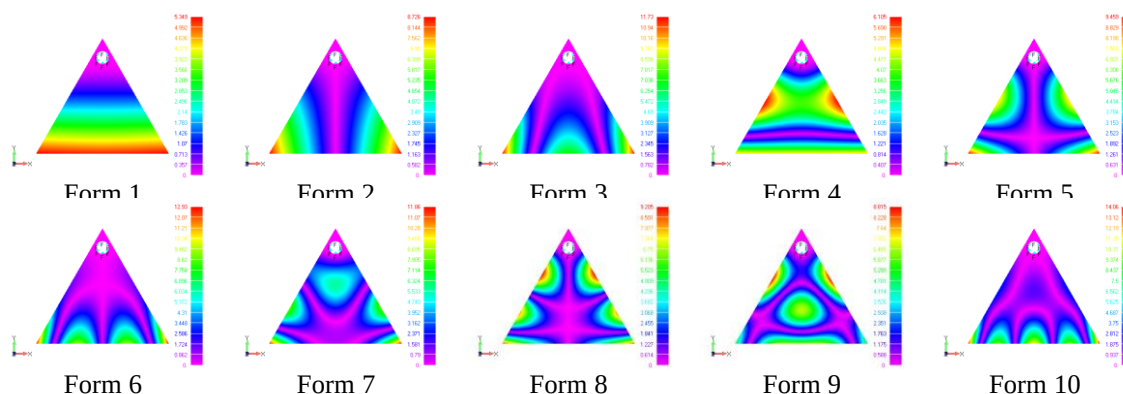
Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_{12} представлені на рис. 4.26.

Рис. 4.26. Форми вільних коливань пластини з отвором O_{12}

Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_{13} представлені на рис. 4.27.

Рис. 4.27. Форми вільних коливань пластини з отвором O_{13}

Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим твором в положенні O_{14} представлені на рис. 4.28.

Рис. 4.28. Форми вільних коливань пластини з отвором O_{14}

Аналізуючи отримані результати можна спостерігати суттєвий вплив положення отвору на частоти і форми вільних коливань. У всіх розглянутих випадках перші дві частоти і форми коливань відповідають поворотних коливанням відносно вісей координат XO та YO .

4.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин з круглими отворами різного радіусу

Дослідимо вільні коливання трикутних пластин з круглим отвором різного радіусу: $r_1=10$ мм, $r_2=20$ мм, $r_3=30$ мм, $r_4=40$ мм, $r_5=50$ мм, тобто з відношеннями радіусів отворів до радіусу вписаного кола в рівносторонній трикутник r/r_7 : $1/6$, $1/3$, $1/2$, $2/3$, $5/6$.

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань трикутних

пластин з круглими отворами різних радіусів, які представлено в таблиці 4.7.

Форми коливань для пластин з радіусом $r \leq 30$ мм відповідають формам коливань з радіусом $r=10$ мм (рис. 4.19). Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим отвором радіусом r_3 представлені на рис. 4.29.

Таблиці 4.7.

Частоти вільних коливань пластин з круглими отворами різних r/r_T

Form	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6
1	204,33	292,37	375,31	484,82	641,56
2	222,35	292,38	375,33	485,12	641,61
3	297,32	314,13	381,76	485,12	641,72
4	498,30	806,13	1174,28	1637,81	2253,73
5	664,39	806,15	1174,31	1640,16	2253,93
6	851,64	1080,13	1253,87	1640,22	2254,08
7	1030,83	1082,65	1476,37	1993,17	2675,33
8	1049,28	1246,25	1529,06	1993,34	2675,63
9	1180,07	1246,27	1529,10	1994,68	2675,90
10	1839,04	1925,43	2303,32	3554,75	5415,37

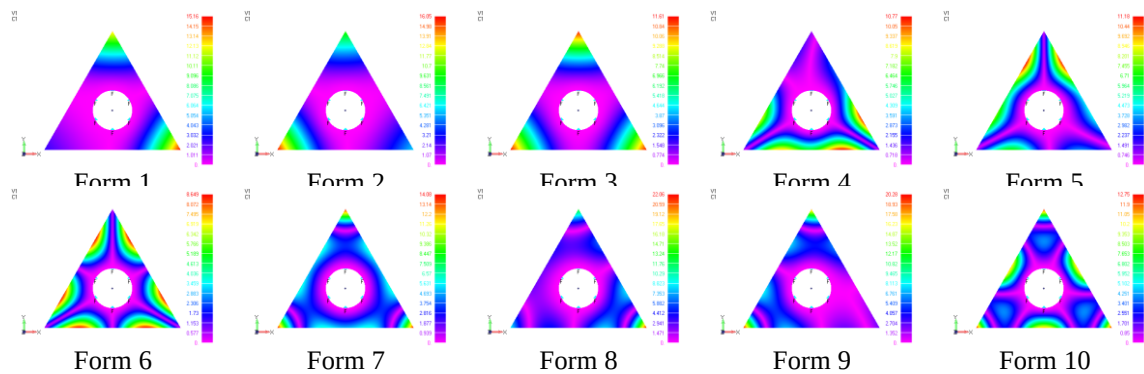


Рис. 4.29. Форми вільних коливань пластини з отвором радіусом r_3

Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленим отвором радіусом r_4 представлені на рис. 4.30.

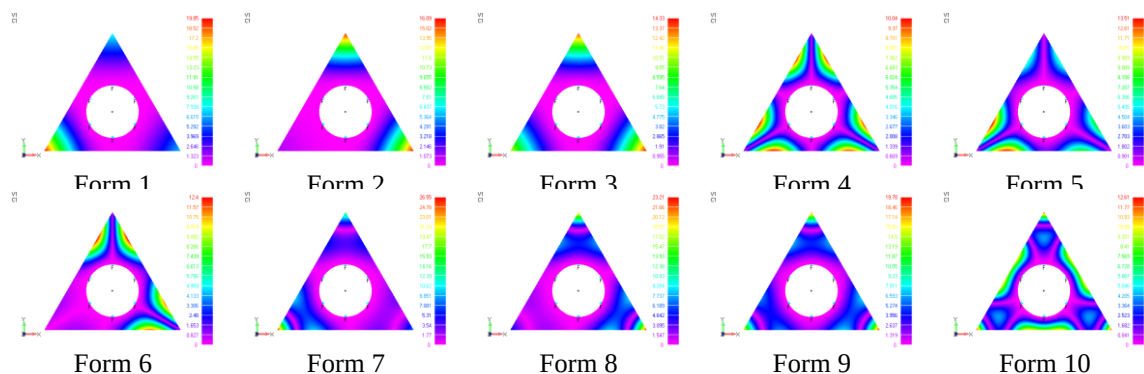


Рис. 4.30. Форми вільних коливань пластини з отвором радіусом r_4

Перші десять форм вільних коливань трикутної пластинки з вільними краями та жорстко закріпленням отвором радіусом r_5 представлені на рис. 4.31.

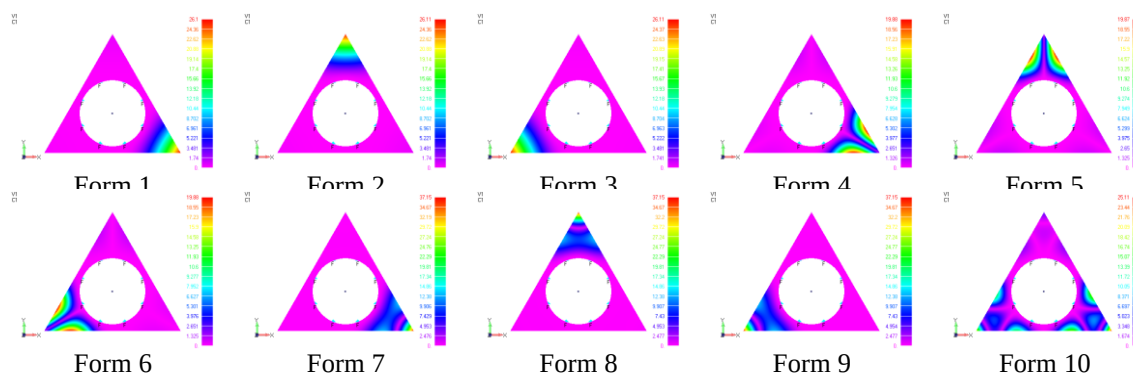


Рис. 4.31. Форми вільних коливань пластини з отвором радіусом r_5

Аналізуючи отримані результати можна спостерігати збільшення частоти вільних коливань із збільшенням радіусу жорстко закріпленого круглого отвору. Форми коливань пластин з $r/r_T=2/3$ є схожими на форми коливань пластин з радіусом $r/r_T \leq 1/2$, мають більші поля нульових переміщень, які спотворюють форму коливань. Форми коливань пластин з $r/r_T=5/6$ суттєво відрізняються від форм коливань пластин з радіусом $r/r_T \leq 1/2$, здебільшого спостерігається почергове коливання одного з кутів пластини, тобто одна і та ж сама форма коливань повторюється на кожному з кутів пластини.

4.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань чотирикутних пластин з отвором

За допомогою FEMAP було побудовано геометричну модель квадратної пластини [274] зі стороною $a=120$ мм, товщиною $h=2$ мм та отвором в центрі радіусом $r=6$ мм. Для порівняння також була побудована геометрична модель пластини без отвору. Як матеріал пластини був вибраний алюміній. Пластина досліджувалась при різних варіантах жорстко закріплених країв (C_e) та отвору (C_h) і вільних країв (F_e) та отвору (F_h) (рис. 4.32). Скінченно-елементна розбивка проводилась tetra-елементами розміром сторони h . Розрахунок проводився на визначення частот і форм вільних коливань.

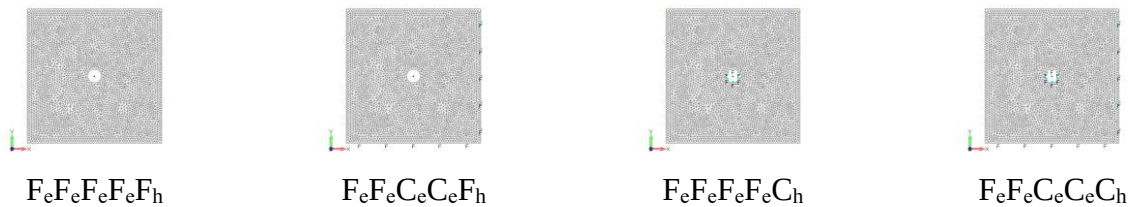


Рис. 4.32. Варіанти закріплення квадратної пластини з отвором

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань квадратних пластин з отвором та без отвору з різними варіантами жорсткого закріплення. Частоти вільних коливань квадратних пластин з вільними краями представлені в таблиці 4.8 та на гістограмі (рис. 4.33).

Таблиця 4.8

Частоти вільних коливань квадратних пластин з вільними краями

Form	$f, \text{Гц}$			Form	$f, \text{Гц}$		
	$F_e F_e F_e F_e$	$F_e F_e F_e F_e F_h$	$F_e F_e F_e F_e C_h$		$F_e F_e F_e F_e$	$F_e F_e F_e F_e F_h$	$F_e F_e F_e F_e C_h$
1	453,67	450,53	428,74	6	2101,31	2098,21	1687,46
2	665,54	658,98	468,71	7	2101,31	2098,22	2342,35
3	843,32	827,54	694,06	8	2152,85	2140,35	2431,90
4	1177,90	1178,20	1244,87	9	2341,23	2342,33	2432,28
5	1177,93	1178,21	1245,00	10	2646,00	2635,32	2700,37

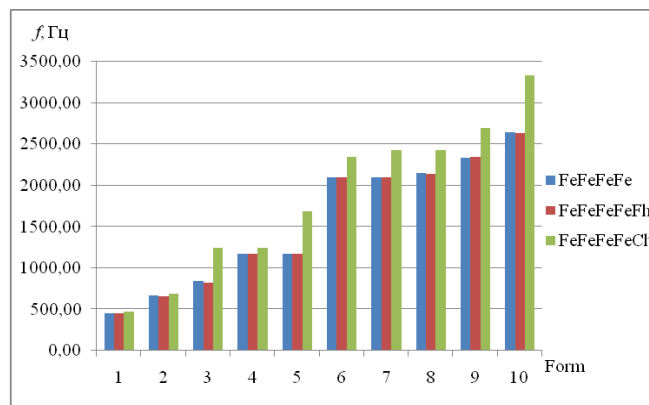


Рис. 4.33. Частоти вільних коливань квадратних пластин з вільними краями

Порівняння 1-5 форм коливань квадратних пластин з отвором з вільними краями представлені на рис. 4.34.

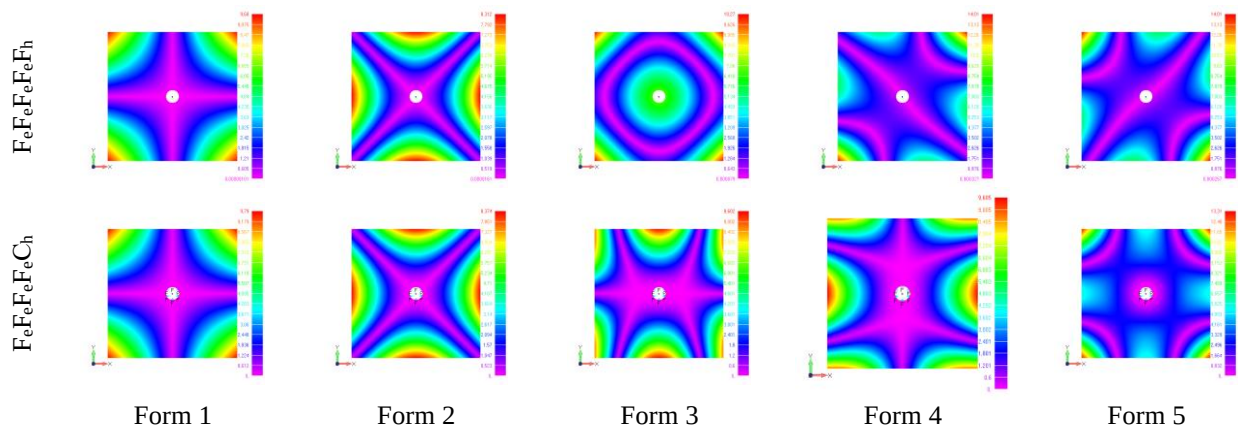


Рис. 4.34. Порівняння 1-5 форм коливань квадратних пластин з отвором з вільними краями

Порівняння 6-10 форм коливань квадратних пластин з отвором з вільними краями представлені на рис. 4.35.

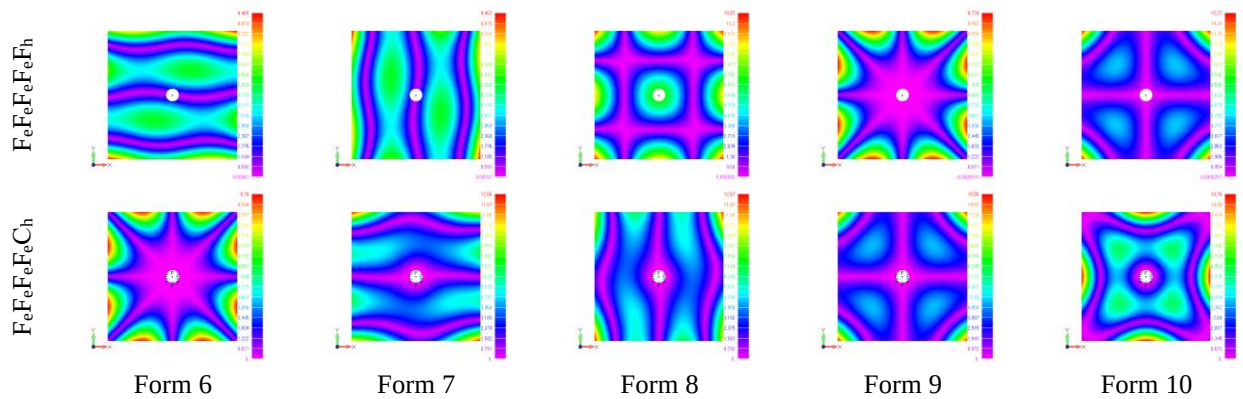


Рис. 4.35. Порівняння 6-10 форм коливань квадратних пластин з отвором з вільними краями

Частоти вільних коливань квадратних пластин з жорстко закріпленими двома суміжними краями та двома вільними краями представлені в таблиці 4.9 та на гістограмі (рис. 4.36).

Таблиця 4.9

Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленими двома краями

Form	f , Гц			Form	f , Гц		
	$F_e F_e C_e C_e$	$F_e F_e C_e C_e F_h$	$F_e F_e C_e C_e C_h$		$F_e F_e C_e C_e$	$F_e F_e C_e C_e F_h$	$F_e F_e C_e C_e C_h$
1	236,66	236,14	415,80	6	2256,70	2254,24	3218,36
2	814,74	812,78	905,04	7	2923,14	2920,65	3537,42
3	916,21	911,60	1387,92	8	3020,47	3012,85	3575,84
4	1625,07	1616,13	2312,26	9	4150,97	4140,34	4244,83
5	2146,80	2147,72	2498,87	10	4254,08	4244,51	4460,60

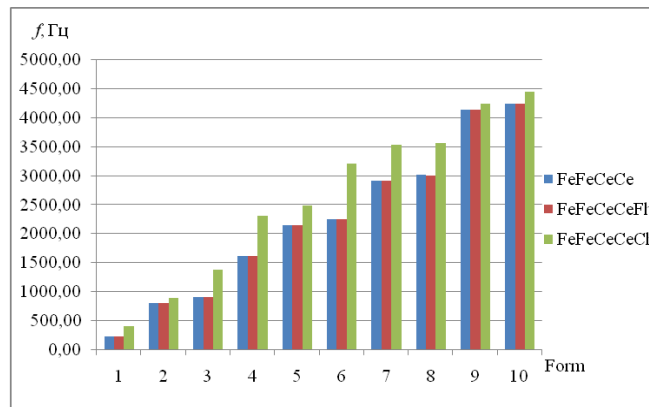


Рис. 4.36. Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленими двома краями

Порівняння 1-5 форм коливань квадратної пластини з отвором з жорстко закріпленими двома суміжними краями та двома вільними краями представлені на рис. 4.37.

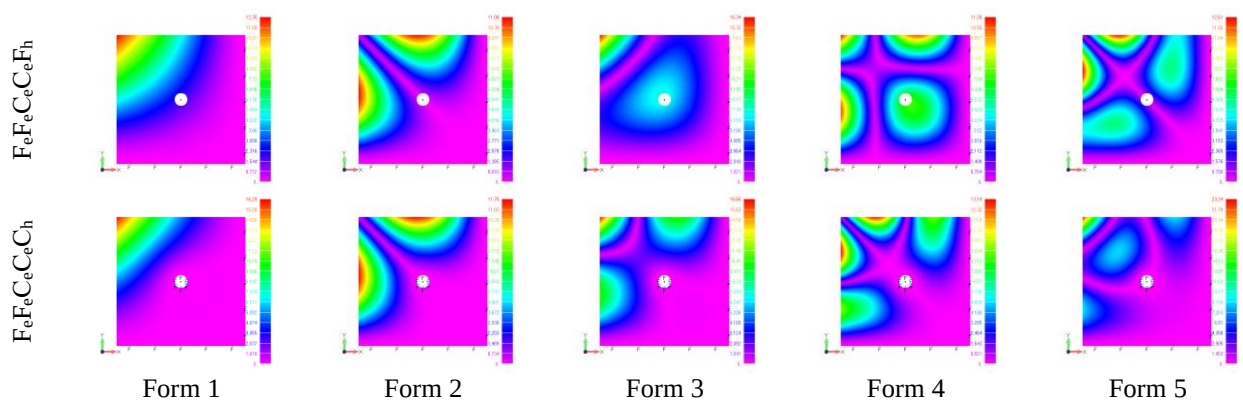


Рис. 4.37. Порівняння 1-5 форм коливань квадратних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома суміжними краями

Порівняння 6-10 форм коливань квадратних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома краями та двома вільними краями представлені на рис. 4.38.

Порівнюючи квадратні пластини без отвору і з отвором, на які не накладено граничні умови, спостерігаємо мале відхилення між частотами, яке не перевищує 2% для всіх розглянутих варіантів закріплення країв, а це означає, що при відношенні сторони квадрата до радіусу отвору, яке менше 1/20, є можливість не враховувати наявності отвору при визначенні частот вільних коливань квадратних пластин будь-яким методом.

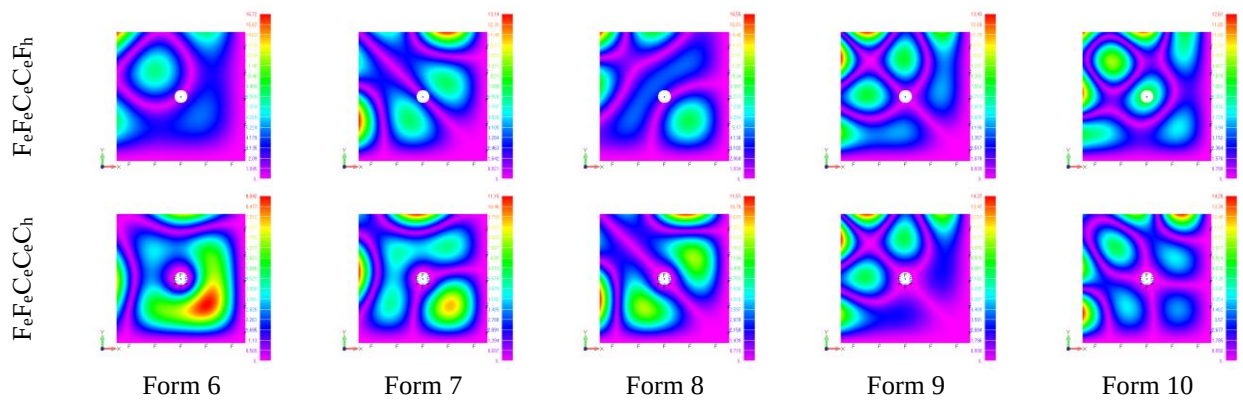


Рис. 4.38. Порівняння 6-10 форм коливань квадратних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома суміжними краями

Для пластини з вільними краями та жорстко закріпленим отвором спостерігаються три поворотні форми коливання (Form_{xyz}) (рис. 4.39) відносно вісей координат.

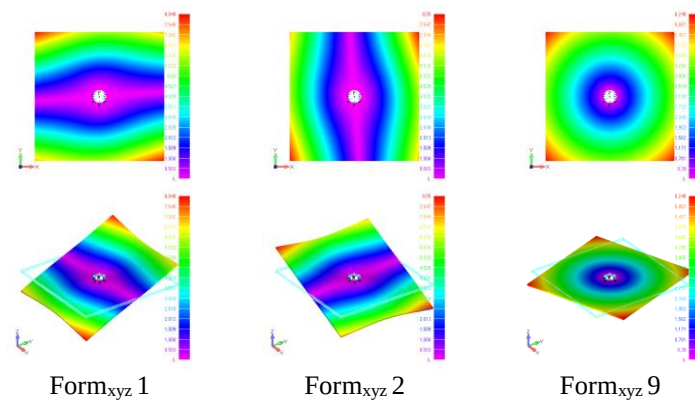


Рис. 4.39. Поворотні форми коливань відносно вісей координат пластини $F_e F_e F_e C_h$

Вказані форми коливань (рис. 4.39) не були враховані в таблиці 4.8. Для всіх пластинок спостерігаються однакові форми з порушенням порядку формоутворення та деякою зміною вузлових ліній за рахунок жорсткого закріплення отвору.

Дослідимо коефіцієнти граничних умов таблиці 3.32 для квадратної пластини з отвором і без з жорстко закріпленими двома суміжними краями, поділивши відповідні частоти пластин на відповідні частоти пластин з отвором і без з вільними краями. Отримані коефіцієнти граничних умов представлені в таблиці 4.10.

Коефіцієнти граничних квадратних пластин з отвором і без

Form	$f, \text{Гц}$			Form	$f, \text{Гц}$		
	$\frac{f_{F_e F_e C_c C_c}}{f_{F_e F_e F_e F_e}}$	$\frac{f_{F_e F_e C_c C_c F_h}}{f_{F_e F_e F_e F_e F_h}}$	$\frac{f_{F_e F_e C_c C_c C_h}}{f_{F_e F_e F_e F_e C_h}}$		$\frac{f_{F_e F_e C_c C_c}}{f_{F_e F_e F_e F_e}}$	$\frac{f_{F_e F_e C_c C_c F_h}}{f_{F_e F_e F_e F_e F_h}}$	$\frac{f_{F_e F_e C_c C_c C_h}}{f_{F_e F_e F_e F_e C_h}}$
1	0,52	0,52	0,97	6	1,07	1,07	1,91
2	1,22	1,23	1,93	7	1,39	1,39	1,51
3	1,09	1,10	2,00	8	1,40	1,41	1,47
4	1,38	1,37	1,86	9	1,77	1,77	1,75
5	1,82	1,82	2,01	10	1,61	1,61	1,65

Коефіцієнти граничних умов таблиці 4.10 квадратної пластин без отвору та з незакріпленим отвором відповідають коефіцієнтам граничних умов таблиці 3.32, наявність незакріпленого отвору не впливає на коефіцієнти граничних умов так само як у випадку трикутної пластинки, в свою чергу при закріпленому отворі коефіцієнти суттєво відрізняються, зі збільшенням номеру частоти різниця між коефіцієнтами зменшується.

4.4. Розрахунок частот та форм вільних коливань п'ятикутних пластин з отвором

В середовищі програми FEMAP побудована геометрична модель пластини у вигляді правильного п'ятикутника [274, 276] зі стороною $a = 87,19 \text{ мм}$, товщиною $h = 2 \text{ мм}$, отвором в центрі радіусом $r = 6 \text{ мм}$ та без отвору. Як матеріал пластини був вибраний алюміній. Пластина досліджувалась при різних варіантах жорстко закріплених країв (C_e) та отвору (C_h) і вільних країв (F_e) та отвору (F_h) (рис. 4.40). Скінченно-елементна розбивка проводилась tetra-елементами розміром сторони h . Розрахунок проводився на визначення частот і форм вільних коливань.

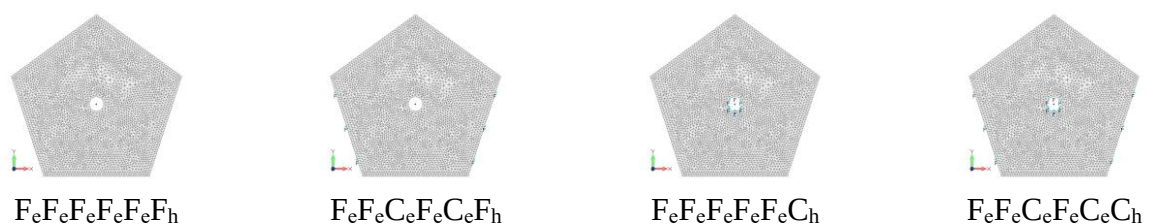


Рис. 4.40. Варіанти закріплення п'ятикутної пластини з отвором

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з отвором з різними варіантами жорсткого закріплення та п'ятикутних пластин без отвору з різними варіантами жорсткого закріплення.

Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з вільними краями представлені в таблиці 4.11 та на гістограмі (рис. 4.41).

Таблиця 4.11

Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з вільними краями

Form	f , Гц			Form	f , Гц		
	$F_e F_e F_e F_e F_e$	$F_e F_e F_e F_e F_e F_h$	$F_e F_e F_e F_e F_e C_h$		$F_e F_e F_e F_e F_e$	$F_e F_e F_e F_e F_e F_h$	$F_e F_e F_e F_e F_e C_h$
1	605,93	600,48	629,99	6	2072,91	2069,72	2314,71
2	605,96	600,50	630,05	7	2073,00	2069,84	2552,03
3	1033,47	1009,42	1438,20	8	2818,53	2813,64	3299,42
4	1434,64	1433,68	1438,25	9	2818,56	2813,66	3299,85
5	1434,65	1433,72	2314,57	10	3336,49	3320,71	3944,44

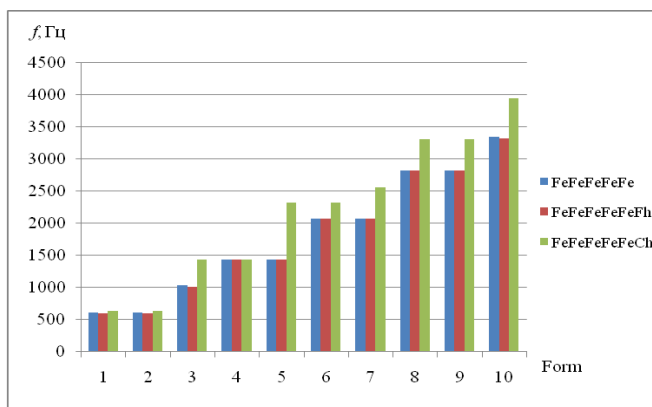


Рис. 4.41. Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з вільними краями

Порівняння 1-5 форм коливань п'ятикутних пластин з отвором з вільними краями представлені на рис. 4.42.

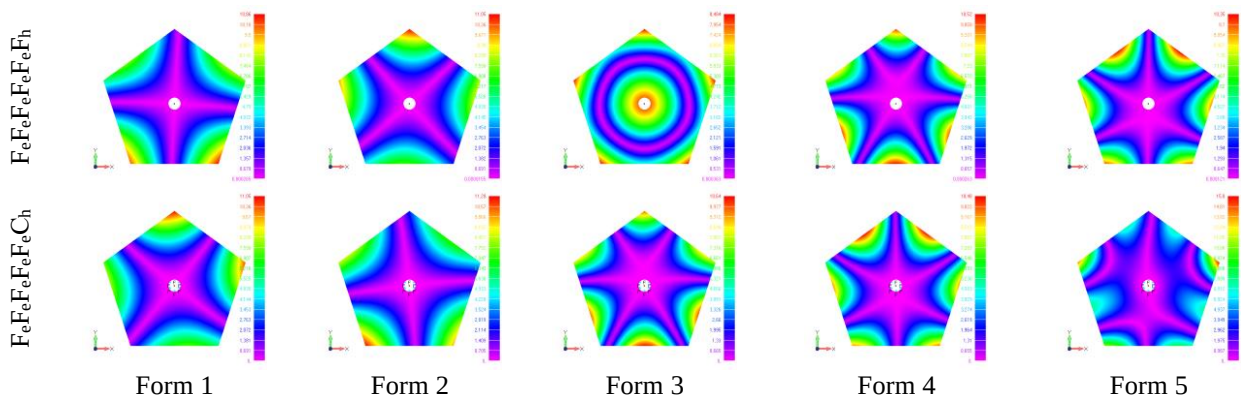


Рис. 4.42. Порівняння 1-5 форм коливань п'ятикутних пластин з отвором з вільними краями

Порівняння 6-10 форм коливань п'ятикутних пластин з отвором з вільними краями представлені на рис. 4.43.

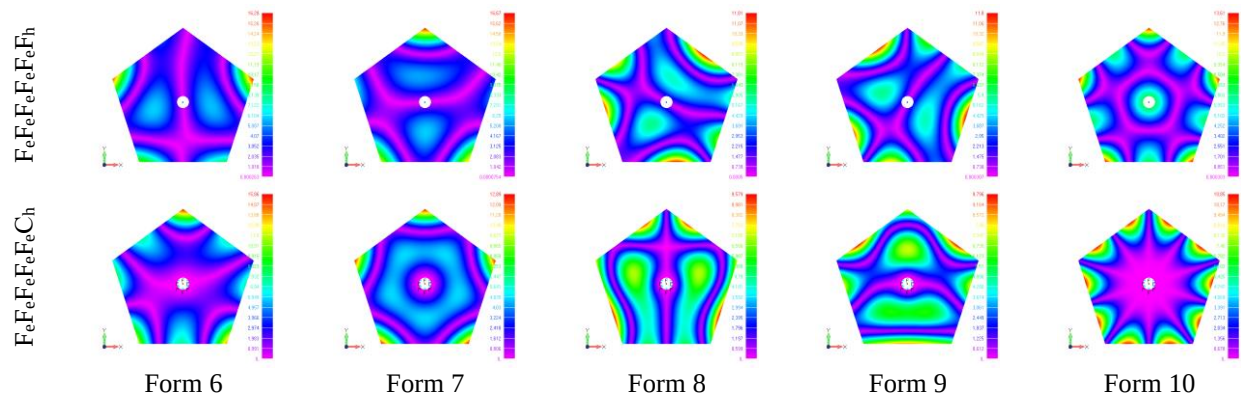


Рис. 4.43. Порівняння 6-10 форм коливань п'ятикутних пластин з отвором з вільними краями

Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з жорстко закріпленими двома несуміжними краями та трьома вільними краями представлені в таблиці 4.12 та на гістограмі (рис. 4.44).

Таблиця 4.12

Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленими двома краями

Form	$f, \text{Гц}$			Form	$f, \text{Гц}$		
	FeFeCeFeCe	FeFeCeFeCeFh	FeFeCeFeCeCh		FeFeCeFeCe	FeFeCeFeCeFh	FeFeCeFeCeCh
1	403,81	402,97	572,30	6	2620,30	2612,57	3564,76
2	1030,13	1022,32	1377,50	7	3015,33	3005,29	3600,58
3	1307,79	1304,97	1582,97	8	3558,51	3546,93	3610,55
4	1526,93	1520,39	2170,72	9	4020,20	3997,63	4270,93
5	2325,09	2314,86	3283,62	10	4230,64	4225,61	4500,53

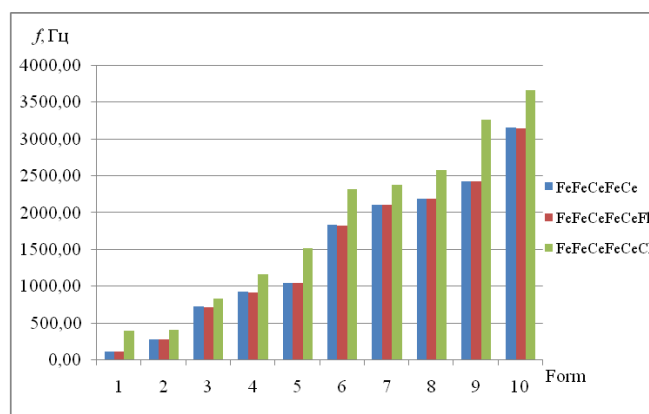


Рис. 4.44. Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленими двома краями

Порівняння 1-5 форм коливань п'ятикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома несуміжними краями та трьома вільними краями представлені на рис. 4.45.

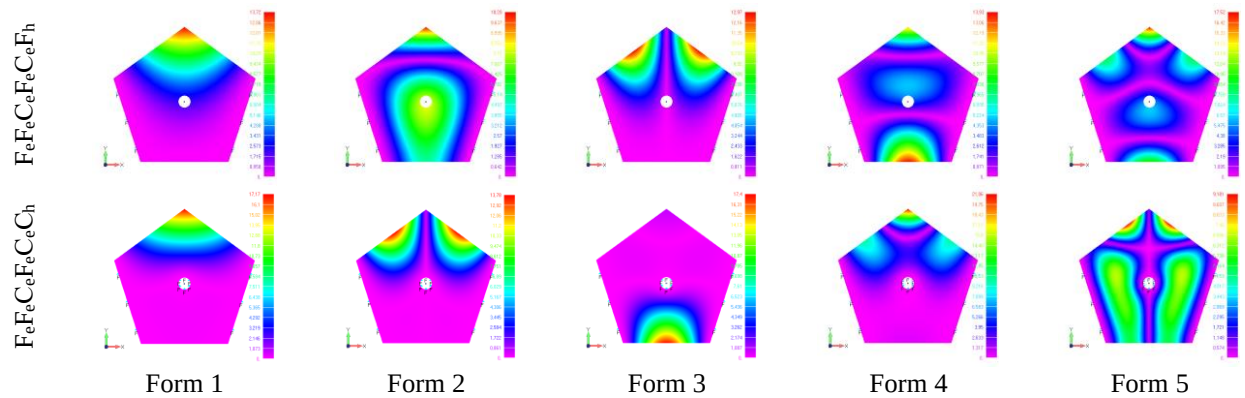


Рис. 4.45. Порівняння 1-5 форм коливань п'ятикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома краями

Порівняння 6-10 форм коливань п'ятикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома несуміжними краями та трьома вільними краями представлені на рис. 4.46.

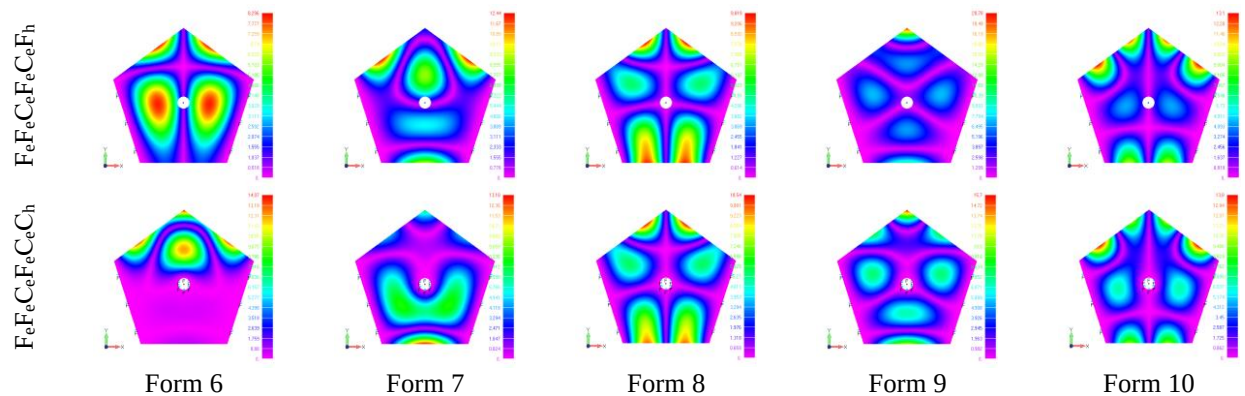


Рис. 4.46. Порівняння 6-10 форм коливань п'ятикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома краями

Для п'ятикутних пластини з вільними краями та жорстко закріпленим отвором спостерігаються три поворотні форми коливання (Form_{xyz}) (рис. 4.47) відносно вісей координат.

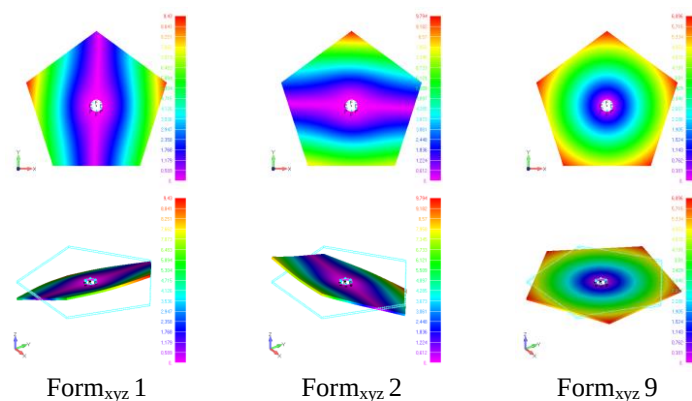


Рис. 4.47. Поворотні форми коливань відносно вісей координат пластини $F_e F_e F_e F_e F_e C_h$

Вказані форми коливань (рис. 4.47) не були враховані в таблиці 4.11. Для всіх пластинок спостерігаються однакові форми з порушенням порядку формоутворення та деякою зміною вузлових ліній за рахунок жорсткого закріплення отвору.

4.5. Розрахунок частот та форм вільних коливань шестикутних пластин з отворами

В середовищі програми FEMAP побудована геометрична модель пластини у вигляді правильного шестикутника [277] зі стороною $a = 69,28 \text{ мм}$, товщиною $h = 2 \text{ мм}$, отвором в центрі радіусом $r = 6 \text{ мм}$ та без отвору. Як матеріал пластини був вибраний алюміній. Пластина досліджувалась при різних варіантах жорстко закріплених країв (C_e) та отвору (C_h) і вільних країв (F_e) та отвору (F_h) (рис. 4.48). Скінченно-елементна розбивка проводилась tetra-елементами розміром сторони h .

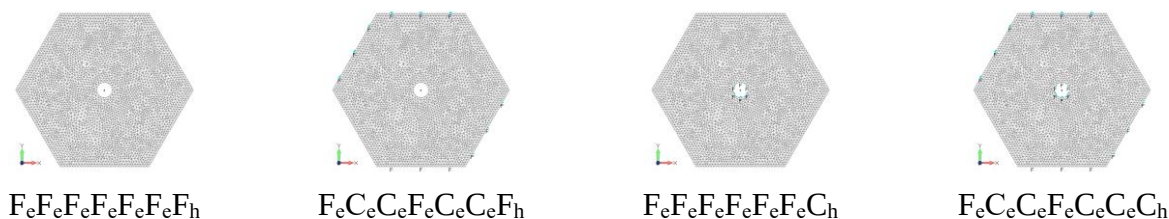


Рис. 4.48. Варіанти закріплення шестикутної пластини з отвором

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань шестикутних пластин з отвором та без з різними варіантами жорсткого

закріплення. Частоти вільних коливань шестикутних пластин з вільними краями представлені в таблиці 4.13 та на гістограмі (рис. 4.49).

Таблиця 4.13

Частоти вільних коливань шестикутних пластин з вільними краями

Form	$f, \text{Гц}$			Form	$f, \text{Гц}$		
	$F_e F_e F_e F_e F_e F_e$	$F_e F_e F_e F_e F_e F_h$	$F_e F_e F_e F_e F_e C_h$		$F_e F_e F_e F_e F_e F_e$	$F_e F_e F_e F_e F_e F_h$	$F_e F_e F_e F_e F_e C_h$
1	648,40	642,15	675,91	6	2461,30	2453,30	2608,00
2	648,41	642,15	675,95	7	2461,36	2453,33	2975,99
3	1114,27	1086,56	1378,90	8	2603,86	2602,81	3165,06
4	1378,22	1377,95	1641,65	9	2604,03	2602,94	3165,38
5	1640,57	1640,14	2607,88	10	4092,07	4089,33	4241,02

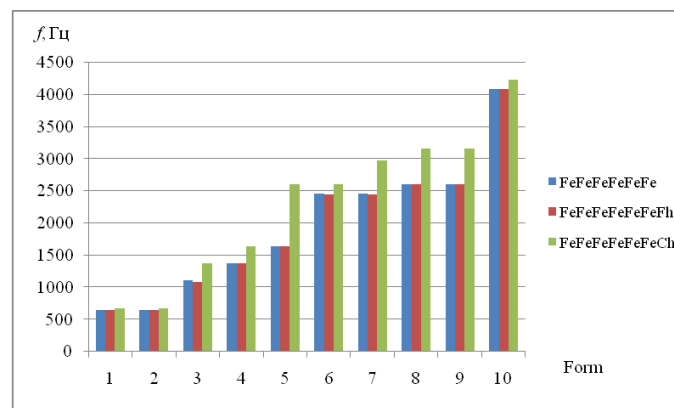


Рис. 4.49. Частоти вільних коливань шестикутних пластин з вільними краями

Порівняння 1-5 форм коливань шестикутних пластин з отвором з вільними краями представлені на рис. 4.50.

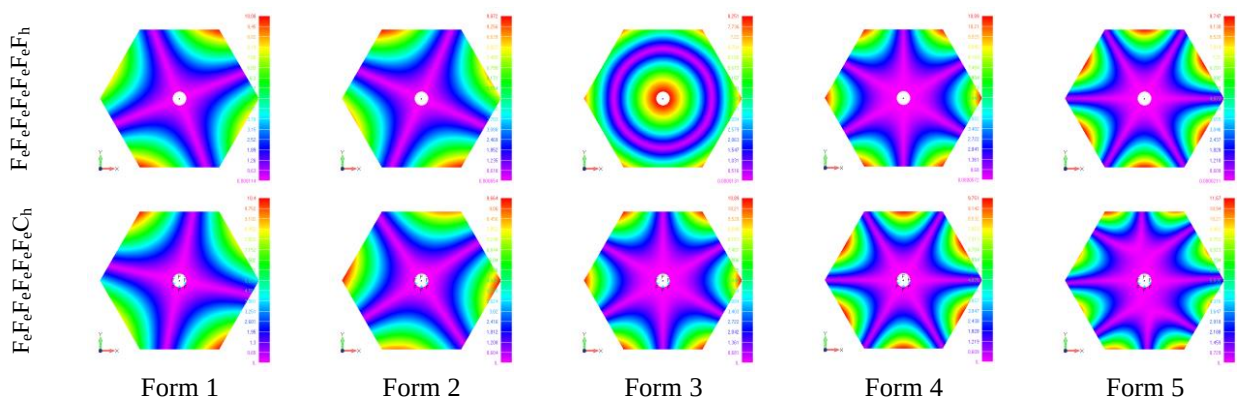


Рис. 4.50. Порівняння 1-5 форм коливань шестикутних пластин з отвором з вільними краями

Порівняння 6-10 форм коливань шестикутних пластин з отвором з вільними краями представлені на рис. 4.51.

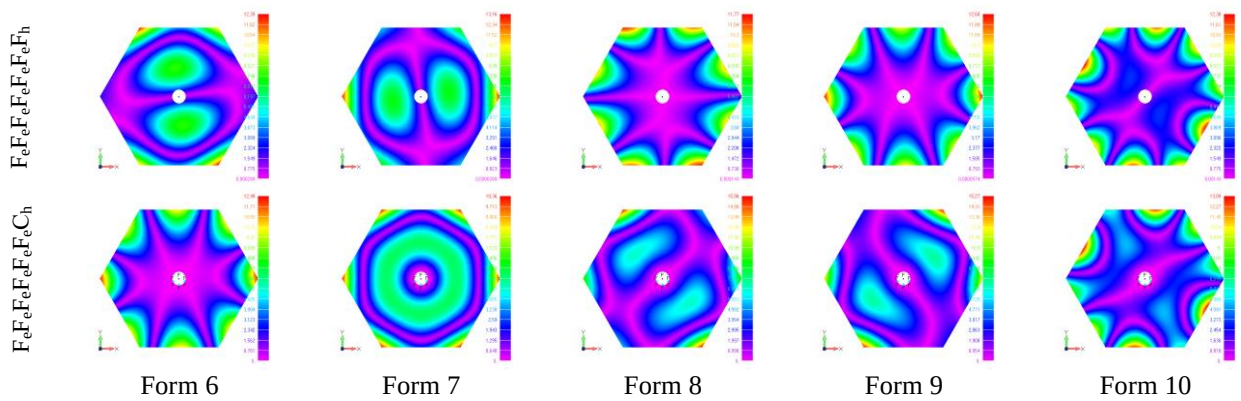


Рис. 4.51. Порівняння 6-10 форм коливань шестикутних пластин з отвором з вільними краями

Частоти вільних коливань шестикутних пластин з жорстко закріпленими чотирма краями та двома вільними краями представлені в таблиці 4.14 та на гістограмі (рис. 4.52).

Таблиця 4.14

Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленими чотирма краями

Form	f_n Гц			Form	f_n Гц		
	$F_e C_e C_e F_e C_e C_e$	$F_e C_e C_e F_e C_e C_e F_h$	$F_e C_e C_e F_e C_e C_e C_h$		$F_e C_e C_e F_e C_e C_e$	$F_e C_e C_e F_e C_e C_e F_h$	$F_e C_e C_e F_e C_e C_e C_h$
1	1149,54	1142,88	2097,02	6	4171,15	4139,65	4321,77
2	1807,90	1805,27	2115,53	7	4702,74	4659,87	4991,62
3	2345,66	2330,11	3622,76	8	5219,35	5213,67	5269,39
4	2717,68	2708,15	3678,30	9	5300,48	5257,68	6388,71
5	3371,22	3358,50	4112,35	10	6316,05	6296,42	7003,84

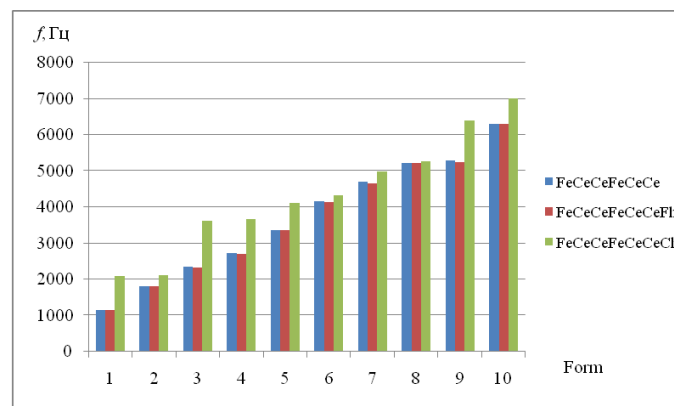


Рис. 4.52. Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленими чотирма краями

Порівняння 1-5 форм коливань шестикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими чотирма краями та двома вільними краями представлені на рис. 4.53. Порівняння 6-10 форм коливань шестикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими чотирма краями та двома

вільними краями представлені на рис. 4.54.

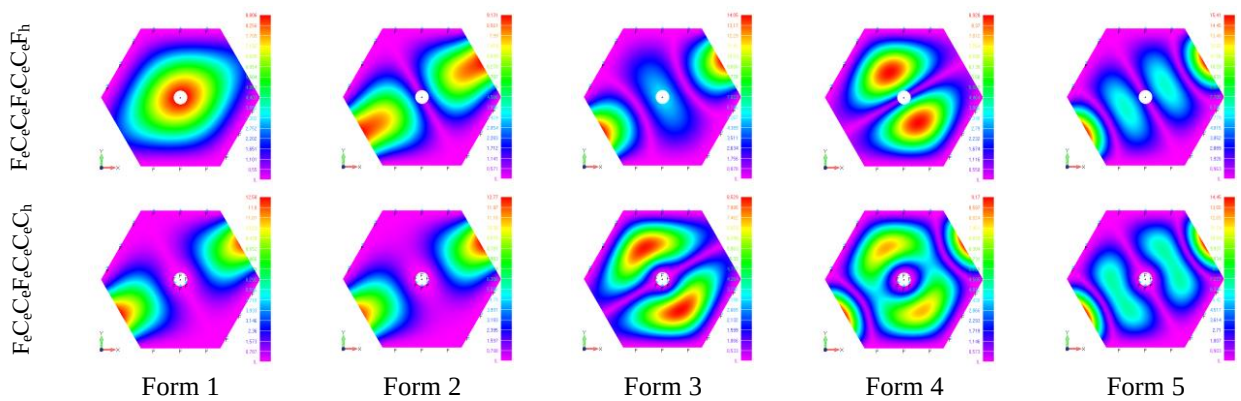


Рис. 4.53. Порівняння 1-5 форм коливань шестикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими чотирма краями

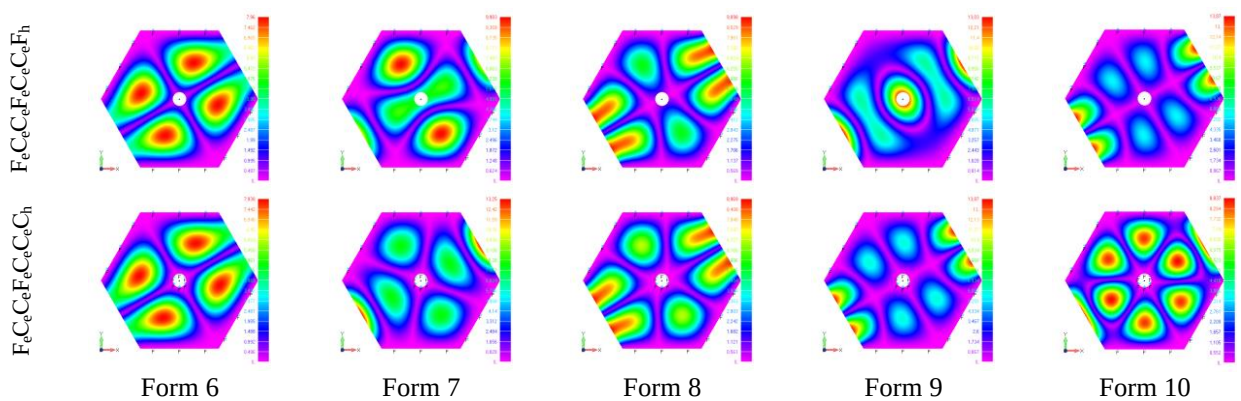


Рис. 4.54. Порівняння 6-10 форм коливань шестикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими чотирма краями

Для шестикутних пластини з вільними краями та жорстко закріпленим отвором спостерігаються три поворотні форми коливання (Form_{xyz}) (рис. 4.55) відносно вісей координат.

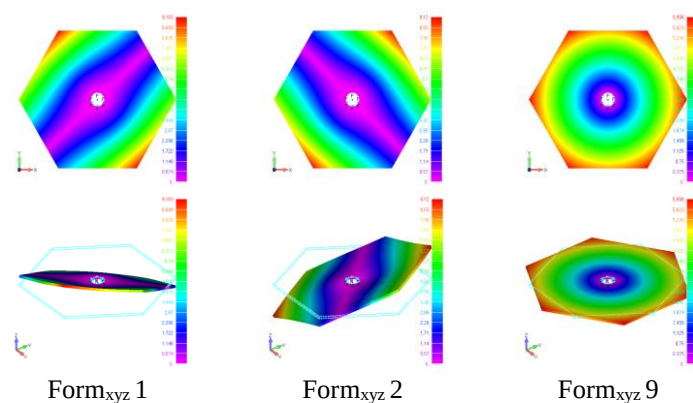


Рис. 4.55. Поворотні форми коливань відносно вісей координат пластини $F_e F_e F_e F_e F_e F_e C_h$

Вказані форми коливань (рис. 4.55) не були враховані в таблиці 4.13. Для всіх шестикутних пластин спостерігаються однакові форми з порушенням порядку формоутворення та деякою зміною вузлових ліній за рахунок жорсткого закріплення отвору.

4.6. Результати та висновки

1. Проведено дослідження частот та форм вільних коливань багатокутних пластин при різних варіантах жорстко закріплених країв та отвору і вільних країв та отвору. При порівнянні пластини без отвору і з отвором $r=6\text{мм}$, на які не накладено граничні умови, спостерігається мале відхилення між частотами, яке не перевищує 2,5% для всіх розглянутих варіантів закріплення країв для всіх багатокутних пластин, а це означає, що можна не враховувати наявності даного отвору $r=6\text{мм}$ при визначенні частот вільних коливань пластин будь-яким методом. Жорстке закріплення отвору значно впливає на зміну частоти таким чином: частота коливань пластини, закріпленої по отвору, при всіх вільних краях пластини суттєво знижується в порівнянні з пластиною без отвору і збільшується при всіх варіаціях закріплення країв.
2. Для пластини різних форм з вільними краями та жорстко закріпленим отвором встановлено три поворотні форми коливання (Form_{xyz}) відносно вісей координат.
3. Встановлено коефіцієнти граничних умов для пластин з отвором. Коефіцієнти граничних умов для пластин з незакріпленим отвором відповідають коефіцієнтам граничних умов пластин без отвору, тобто наявність незакріпленого отвору не впливає на коефіцієнти граничних умов, в свою чергу при закріпленому отворі коефіцієнти суттєво відрізняються, зі збільшенням номеру частоти різниця між коефіцієнтами зменшується.

4. Встановлено, що положення отвору на пластині суттєво впливає на частоти і форми вільних коливань.
5. Досліджено вплив радіусу круглого отвору на частоти вільних коливань пластин з вільними краями та жорстко закріпленим отвором. Форми коливань пластин з $r/r_T=2/3$ є схожими на форми коливань пластин з радіусом $r/r_T \leq 1/2$, мають більші поля нульових переміщень, які спотворюють форму коливань. Форми коливань пластин з $r/r_T=5/6$ суттєво відрізняються від форм коливань пластин з радіусом $r/r_T \leq 1/2$, здебільшого спостерігається почергове коливання одного з кутів пластини, тобто одна і та ж сама форма коливань повторюється на кожному з кутів пластини.

Розділ 5

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОКУТНИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ КОМБІНОВАНОГО ПІДХОДУ

В розділі 2 представлено комбінований підхід у вигляді зведеної формули вільних коливань квадратної пластини з довільними граничними умовами (2.53), яка представляє собою добуток трьох коефіцієнтів: коефіцієнт геометрії; коефіцієнт матеріалу; коефіцієнт форми коливань і граничних умов; та запропоновано поширити формулу на визначення частот багатокутних пластин правильної форми, за умови, що a – сторона багатокутної пластини, а коефіцієнти форми коливань і граничних умов будуть визначатись за формулою (2.54).

В даному розділі, за попередніми розрахунками МСЕ, результати яких представлені в розділі 3, розраховано коефіцієнти форми коливань і граничних умов для різних багатокутних пластин правильної форми із фіксованим співвідношенням товщини пластини до сторони пластини з різними граничними умовами. Поширено ЗФ (2.53) на розрахунок частот вільних коливань багатокутних пластин правильної форми різної товщини з різними граничними умовами.

Зроблено узагальнення використання ЗФ (2.53) для кожної з розглянутих пластин. Проведено порівняння отриманих частот вільних коливань за ЗФ (2.53) з частотами розрахованими МСЕ у розділі 3.

5.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних пластин різної товщини

Для розрахунку перших десяти коефіцієнтів форм коливань і граничних умов алюмінієвої трикутної пластини (FFF) при $h/a=1/60$ [261] використаємо формулу (2.54) та частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.7. Геометрія пластини відповідає геометрії пластини розглянутої в пункті 3.3. Отримані коефіцієнти форм коливань і граничних умов для трикутної пластини (FFF)

наведені в таблиці 5.1. Розраховані частоти вільних коливань трикутних пластини (FFF) різної товщини за ЗЗФ (2.53) з коефіцієнтами з таблиці 5.1 представлені в таблиці 5.2.

Таблиця 5.1

Коефіцієнти трикутних пластин (FFF) при $h/a=1/60$

i	F_i	i	F_i
1	1,564809	6	4,096037
2	1,613798	7	5,241207
3	1,613851	8	7,269696
4	3,833636	9	7,270544
5	3,833705	10	7,270732

Таблиця 5.2

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (FFF)

Form	1/240		$\epsilon, \%$	1/120		$\epsilon, \%$	1/60		$\epsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	147,31	147,79	0,32	294,61	295,39	0,26	589,22	589,22	0,00
2	151,92	152,92	0,65	303,84	305,34	0,49	607,67	607,67	0,00
3	151,92	152,92	0,65	303,85	305,35	0,49	607,69	607,69	0,00
4	360,89	363,37	0,68	721,77	725,82	0,56	1443,54	1443,54	0,00
5	360,89	363,37	0,68	721,78	725,82	0,56	1443,57	1443,57	0,00
6	385,59	390,15	1,17	771,17	778,17	0,90	1542,35	1542,35	0,00
7	493,39	498,44	1,01	986,78	994,75	0,80	1973,56	1973,56	0,00
8	684,34	691,25	1,00	1368,69	1380,39	0,85	2737,38	2737,38	0,00
9	684,42	693,35	1,29	1368,85	1383,30	1,04	2737,70	2737,70	0,00
10	684,44	693,35	1,29	1368,88	1383,31	1,04	2737,77	2737,77	0,00
Max			1,29			1,04			0,00
Form	1/30		$\epsilon, \%$	1/20		$\epsilon, \%$	1/15		$\epsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	1178,45	1169,26	0,79	1767,67	1736,35	1,80	2356,89	2286,27	3,09
2	1215,34	1199,48	1,32	1823,01	1772,03	2,88	2430,68	2320,76	4,74
3	1215,38	1199,51	1,32	1823,07	1772,05	2,88	2430,76	2320,77	4,74
4	2887,09	2836,91	1,77	4330,63	4157,11	4,17	5774,17	5384,56	7,24
5	2887,14	2836,94	1,77	4330,71	4157,16	4,17	5774,28	5384,59	7,24
6	3084,70	3007,29	2,57	4627,05	4370,82	5,86	6169,40	5611,87	9,93
7	3947,12	3852,32	2,46	5920,68	5603,08	5,67	7894,24	7200,69	9,63
8	5474,76	5299,38	3,31	8212,14	7614,85	7,84	10949,52	9642,62	13,55
9	5475,40	5299,75	3,31	8213,10	7615,21	7,85	10950,80	9642,84	13,56
10	5475,54	5323,10	2,86	8213,31	7688,16	6,83	10951,08	9791,03	11,85
Max			3,31			7,85			13,56
Form	1/12		$\epsilon, \%$	1/10		$\epsilon, \%$	1/5		$\epsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	2946,12	2815,88	4,63	3535,34	3323,03	6,39	7070,68	5678,37	24,52
2	3038,35	2842,68	6,88	3646,02	3336,17	9,29	7292,04	5678,48	28,42
3	3038,45	2842,69	6,89	3646,14	3336,17	9,29	7292,28	5849,28	24,67
4	7217,71	6509,06	10,89	8661,26	7528,27	15,05	17322,51	11166,59	55,13
5	7217,84	6509,11	10,89	8661,41	7528,35	15,05	17322,83	11687,35	48,22
6	7711,75	6721,27	14,74	9254,09	7700,02	20,18	18508,19	11687,85	58,35
7	9867,80	8637,85	14,24	11841,35	9920,08	19,37	23682,71	15071,14	57,14
8	13686,90	11378,94	20,28	16424,28	12843,43	27,88	32848,56	17257,39	90,34
9	13688,50	11379,05	20,30	16426,19	12843,48	27,90	32852,39	17258,37	90,36
10	13688,85	11627,27	17,73	16426,62	13215,24	24,30	32853,24	19007,20	72,85
Max			20,30			27,90			90,36

У таблиці 5.2 зазначені частоти для різних співвідношень h/a : 1/240,

1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/5, частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.15 та відносна різниця розрахунків ε у відсотках. Для перших трьох частот розбіжність розрахунків за ЗФ (2.53) і МСЕ для всіх розглянутих співвідношень не перевищують 30%. Необхідно підвищити точність обчислення коефіцієнтів форм коливань і граничних умов для випадку $1/15 \leq h/a \leq 1/10$ та $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. Для цього розрахуємо коефіцієнти на основі частот трикутної пластини (FFF) при $h/a=1/12$ та при $h/a=1/6$ відповідно. У таблиці 5.3 наведено розраховані уточнені коефіцієнти F_i .

Таблиця 5.3

Уточнені коефіцієнти трикутних пластин (FFF) при $h/a=1/12$ та при $h/a=1/6$

i	F_i , при $h/a=1/12$	i	F_i , при $h/a=1/12$	i	F_i , при $h/a=1/6$	i	F_i , при $h/a=1/6$
1	1,495634	6	3,569952	1	1,330106	6	2,821209
2	1,509868	7	4,587930	2	1,330135	7	3,647936
3	1,509876	8	6,043840	3	1,355306	8	4,371995
4	3,457241	9	6,043899	4	2,763673	9	4,372244
5	3,457263	10	6,175739	5	2,821098	10	4,677455

Перші десять частот, розраховані ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами з таблиці 5.3 та МСЕ, наведено в таблиці 5.4 для $1/15 \leq h/a \leq 1/10$ та в таблиці 5.5 для $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. З наведених розрахунків можна побачити зменшення розбіжності між двома розрахунками, що свідчить про підвищення точності розрахунків ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами.

Таблиця 5.4

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (FFF)

Form	1/15		ε , %	1/12		ε , %	1/10		ε , %
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	2252,70	2286,27	1,47	2815,88	2815,88	0,00	3379,06	3323,03	1,69
2	2274,14	2320,76	2,01	2842,68	2842,68	0,00	3411,21	3336,17	2,25
3	2274,16	2320,77	2,01	2842,69	2842,69	0,00	3411,23	3336,17	2,25
4	5207,25	5384,56	3,29	6509,06	6509,06	0,00	7810,88	7528,27	3,75
5	5207,28	5384,59	3,29	6509,10	6509,11	0,00	7810,93	7528,35	3,75
6	5377,01	5611,87	4,18	6721,27	6721,27	0,00	8065,52	7700,02	4,75
7	6910,28	7200,69	4,03	8637,85	8637,85	0,00	10365,42	9920,08	4,49
8	9103,15	9642,62	5,59	11378,94	11378,94	0,00	13654,73	12843,43	6,32
9	9103,24	9642,84	5,60	11379,05	11379,05	0,00	13654,86	12843,48	6,32
10	9301,82	9791,03	5,00	11627,27	11627,27	0,00	13952,72	13215,24	5,58
Max			5,60			0,00			6,32

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (FFF)

Form	1/8		$\varepsilon, \%$	1/6		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	3756,35	4019,21	6,54	5008,47	5008,47	0,00	6010,16	5678,37	5,84
2	3756,43	4019,24	6,54	5008,58	5008,58	0,00	6010,29	5678,48	5,84
3	3827,52	4037,66	5,20	5103,36	5103,36	0,00	6124,03	5849,28	4,70
4	7804,89	8862,15	11,93	10406,52	10406,52	0,00	12487,82	11166,59	11,83
5	7967,06	8862,26	10,10	10622,75	10622,75	0,00	12747,30	11687,35	9,07
6	7967,38	8927,23	10,75	10623,17	10623,17	0,00	12747,80	11687,85	9,07
7	10302,14	11572,89	10,98	13736,18	13736,18	0,00	16483,42	15071,14	9,37
8	12346,95	14577,60	15,30	16462,60	16462,60	0,00	19755,12	17257,39	14,47
9	12347,65	14578,22	15,30	16463,54	16463,54	0,00	19756,25	17258,37	14,47
10	13209,60	15184,68	13,01	17612,80	17612,80	0,00	21135,36	19007,20	11,20
Max			15,30			0,00			14,47

ЗФ (2.53) з таблицями коефіцієнтів форм коливань та граничних умов можна використовувати для швидкого інженерного розрахунку перших десяти частот і форм вільних коливань трикутних пластин (FFF) у вигляді таблиці 5.6.

Таблиця 5.6.

Узагальнення використання ЗФ (2.53) для трикутних пластин (FFF)

$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i$									
i	F_b $h/a \leq 1/15$; $\varepsilon < 14\%$	F_b $1/15 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 7\%$	F_b $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 16\%$	Form	i	F_b $h/a \leq 1/15$; $\varepsilon < 14\%$	F_b $1/15 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 7\%$	F_b $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 16\%$	Form
1	1,564809	1,495634	1,330106		6	4,096037	3,569952	2,821209	
2	1,613798	1,509868	1,330135		7	5,241207	4,587930	3,647936	
3	1,613851	1,509876	1,355306		8	7,269696	6,043840	4,371995	
4	3,833636	3,457241	2,763673		9	7,270544	6,043899	4,372244	
5	3,833705	3,457263	2,821098		10	7,270732	6,175739	4,677455	

Для розрахунку перших десяти коефіцієнтів форм коливань і граничних умов алюмінієвої трикутної пластини (FFC) при $h/a=1/60$ використаємо формулу (2.54) та частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.7. Геометрія пластини відповідає геометрії пластини розглянутої в пункті 3.3. Отримані коефіцієнти форм коливань і граничних умов для трикутної

пластини (FFC) наведені в таблиці 5.7. Розраховані частоти вільних коливань трикутних пластини (FFC) різної товщини за ЗФ (2.53) з коефіцієнтами з таблиці 5.7 представлені в таблиці 5.8.

Таблиця 5.7

Коефіцієнти трикутних пластин (FFC) при $h/a=1/60$

i	F_i	i	F_i
1	0,407732	6	4,895303
2	1,585328	7	7,545731
3	1,751576	8	7,546342
4	4,072138	9	9,038003
5	4,194274	10	9,368347

Таблиця 5.8

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (FFC)

Form	1/240		$\varepsilon, \%$	1/120		$\varepsilon, \%$	1/60		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	38,38	38,41	0,08	76,77	76,87	0,13	153,53	153,53	0,00
2	149,24	149,90	0,44	298,47	299,77	0,43	596,95	596,95	0,00
3	164,89	165,47	0,35	329,78	331,01	0,37	659,55	659,55	0,00
4	383,34	385,66	0,60	766,68	771,27	0,60	1533,35	1533,35	0,00
5	394,83	398,25	0,86	789,67	795,85	0,78	1579,34	1579,34	0,00
6	460,83	464,59	0,81	921,66	928,60	0,75	1843,31	1843,31	0,00
7	710,33	717,80	1,04	1420,66	1434,79	0,98	2841,32	2841,32	0,00
8	710,39	718,91	1,19	1420,77	1436,19	1,07	2841,55	2841,55	0,00
9	850,81	861,81	1,28	1701,61	1721,41	1,15	3403,23	3403,23	0,00
10	881,90	893,73	1,32	1763,81	1785,12	1,19	3527,62	3527,62	0,00
Max			1,32			1,19			0,00
Form	1/30		$\varepsilon, \%$	1/20		$\varepsilon, \%$	1/15		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	307,06	305,62	0,47	460,59	456,34	0,93	614,12	604,90	1,52
2	1193,90	1177,70	1,38	1790,85	1737,03	3,10	2387,80	2267,18	5,32
3	1319,10	1302,78	1,25	1978,65	1924,75	2,80	2638,20	2517,08	4,81
4	3066,70	3003,55	2,10	4600,05	4383,87	4,93	6133,40	5647,62	8,60
5	3158,68	3080,19	2,55	4738,02	4474,12	5,90	6317,36	5733,40	10,19
6	3686,62	3592,05	2,63	5529,93	5206,42	6,21	7373,24	6652,44	10,84
7	5682,64	5479,60	3,71	8523,96	7837,55	8,76	11365,28	9866,72	15,19
8	5683,10	5491,85	3,48	8524,65	7875,29	8,25	11366,20	9941,81	14,33
9	6806,46	6536,09	4,14	10209,69	9289,66	9,90	13612,92	11615,84	17,19
10	7055,24	6768,50	4,24	10582,86	9618,81	10,02	14110,48	12028,64	17,31
Max			4,24			10,02			17,31
Form	1/12		$\varepsilon, \%$	1/10		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	767,65	751,30	2,18	921,18	894,85	2,94	1842,36	1687,58	9,17
2	2984,75	2764,75	7,96	3581,70	3226,44	11,01	7163,40	5237,44	36,77
3	3297,75	3076,89	7,18	3957,30	3599,78	9,93	7914,60	5976,83	32,42
4	7666,75	6788,10	12,94	9200,10	7803,81	17,89	18400,20	11397,66	61,44
5	7896,70	6852,36	15,24	9476,04	7832,29	20,99	18952,08	11811,14	60,46
6	9216,55	7928,23	16,25	11059,86	9037,38	22,38	22119,72	13163,66	68,04
7	14206,60	11576,40	22,72	17047,92	12996,70	31,17	34095,84	17276,84	97,35
8	14207,75	11702,69	21,41	17049,30	13184,19	29,32	34098,60	18243,14	86,91
9	17016,15	13548,32	25,60	20419,38	15134,62	34,92	40838,76	20091,85	103,26
10	17638,10	14035,06	25,67	21165,72	15689,90	34,90	42331,44	21162,19	100,03
Max			25,67			34,92			103,26

У таблиці 5.8 зазначені частоти для різних співвідношень h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/5, частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.18 та відносна різниця розрахунків ε у відсотках. Для перших трьох частот розбіжність розрахунків за ЗФ (2.53) і МСЕ для всіх розглянутих співвідношень не перевищують 33%. Необхідно підвищити точність обчислення коефіцієнтів форм коливань і граничних умов для випадку $1/15 \leq h/a \leq 1/10$ та $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. Для цього розрахуємо коефіцієнти на основі частот трикутної пластини (FFC) при $h/a=1/12$ та при $h/a=1/6$ відповідно. У таблиці 5.9 наведено розраховані уточнені коефіцієнти F_i .

Таблиця 5.9

Уточнені коефіцієнти трикутних пластин (FFC) при $h/a=1/12$ та при $h/a=1/6$

i	F_i , при $h/a=1/12$	i	F_i , при $h/a=1/12$	i	F_i , при $h/a=1/6$	i	F_i , при $h/a=1/6$
1	0,399047	6	4,211021	1	0,381857	6	3,227958
2	1,468477	7	6,148720	2	1,249030	7	4,373543
3	1,634268	8	6,215798	3	1,413211	8	4,536322
4	3,605449	9	7,196091	4	2,806008	9	5,064636
5	3,639581	10	7,454619	5	2,867419	10	5,289849

Перші десять частот, розраховані ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами з таблиці 5.9 та МСЕ, наведено в таблиці 5.10 для $1/15 \leq h/a \leq 1/10$ та в таблиці 5.11 для $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. З наведених розрахунків можна побачити зменшення розбіжності між двома розрахунками, що свідчить про підвищення точності розрахунків ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами.

Таблиця 5.10

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (FFC)

Form	1/15		ε , %	1/12		ε , %	1/10		ε , %
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	601,04	604,90	0,64	751,30	751,30	0,00	901,56	894,85	0,75
2	2211,80	2267,18	2,44	2764,75	2764,75	0,00	3317,70	3226,44	2,83
3	2461,51	2517,08	2,21	3076,89	3076,89	0,00	3692,27	3599,78	2,57
4	5430,48	5647,62	3,84	6788,10	6788,10	0,00	8145,72	7803,81	4,38
5	5481,89	5733,40	4,39	6852,36	6852,36	0,00	8222,83	7832,29	4,99
6	6342,58	6652,44	4,66	7928,23	7928,23	0,00	9513,88	9037,38	5,27
7	9261,12	9866,72	6,14	11576,40	11576,40	0,00	13891,68	12996,70	6,89
8	9362,15	9941,81	5,83	11702,69	11702,69	0,00	14043,23	13184,19	6,52
9	10838,66	11615,84	6,69	13548,32	13548,32	0,00	16257,98	15134,62	7,42
10	11228,05	12028,64	6,66	14035,06	14035,06	0,00	16842,07	15689,90	7,34
Max			6,69			0,00			7,42

Таблиця 5.11

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (FFC)

Form	1/8		ε , %	1/6		ε , %	1/5		ε , %
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	1078,40	1104,86	2,39	1437,87	1437,87	0,00	1725,44	1687,58	2,24
2	3527,39	3849,07	8,36	4703,18	4703,18	0,00	5643,82	5237,44	7,76
3	3991,05	4314,60	7,50	5321,40	5321,40	0,00	6385,68	5976,83	6,84
4	7924,45	9060,49	12,54	10565,93	10565,93	0,00	12679,12	11397,66	11,24
5	8097,88	9110,08	11,11	10797,17	10797,17	0,00	12956,61	11811,14	9,70
6	9116,08	10426,58	12,57	12154,77	12154,77	0,00	14585,72	13163,66	10,80
7	12351,32	14659,59	15,75	16468,43	16468,43	0,00	19762,12	17276,84	14,39
8	12811,03	14969,65	14,42	17081,37	17081,37	0,00	20497,64	18243,14	12,36
9	14303,04	16992,86	15,83	19070,72	19070,72	0,00	22884,86	20091,85	13,90
10	14939,06	17646,92	15,34	19918,75	19918,75	0,00	23902,50	21162,19	12,95
Max			15,83			0,00			14,39

ЗФ (2.53) з таблицями коефіцієнтів форм коливань та граничних умов можна використовувати для швидкого інженерного розрахунку перших десяти частот і форм вільних коливань трикутних пластин (FFC) у вигляді таблиці 5.12.

Таблиця 5.12.

Узагальнення використання ЗФ (2.53) для трикутних пластин (FFC)

$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i$									
i	F_i , $h/a \leq 1/15$; $\varepsilon < 18\%$	F_i , $1/15 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 8\%$	F_i , $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 16\%$	Form	i	F_i , $h/a \leq 1/15$; $\varepsilon < 18\%$	F_i , $1/15 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 8\%$	F_i , $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 16\%$	Form
1	0,407732	0,399047	0,381857		6	4,895303	4,211021	3,227958	
2	1,585328	1,468477	1,249030		7	7,545731	6,148720	4,373543	
3	1,751576	1,634268	1,413211		8	7,546342	6,215798	4,536322	
4	4,072138	3,605449	2,806008		9	9,038003	7,196091	5,064636	
5	4,194274	3,639581	2,867419		10	9,368347	7,454619	5,289849	

Для розрахунку перших десяти коефіцієнтів форм коливань і граничних умов алюмінієвої трикутної пластини (FCC) при $h/a=1/30$ використаємо формулу (2.54) та частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.7. Геометрія пластини відповідає геометрії пластини розглянутої в пункті 3.3. Отримані коефіцієнти форм коливань і граничних умов для трикутної

пластини (FCC) наведені в таблиці 5.13. Розраховані частоти вільних коливань трикутних пластини (FCC) різної товщини за ЗФ (2.53) з коефіцієнтами з таблиці 5.13 представлені в таблиці 5.14.

Таблиця 5.13

Коефіцієнти трикутних пластин (FCC) при $h/a=1/30$

i	F_i	i	F_i
1	1,802167	6	8,589599
2	4,242449	7	11,722186
3	4,530594	8	12,758365
4	7,526384	9	13,811595
5	8,456123	10	13,874681

Таблиця 5.14

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (FCC)

Form	1/240		$\varepsilon, \%$	1/120		$\varepsilon, \%$	1/60		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	169,65	172,42	1,61	339,30	345,33	1,75	678,60	688,11	1,38
2	399,37	412,48	3,18	798,74	825,65	3,26	1597,48	1639,49	2,56
3	426,50	440,83	3,25	852,99	882,46	3,34	1705,98	1752,74	2,67
4	708,51	744,57	4,84	1417,02	1489,72	4,88	2834,03	2947,11	3,84
5	796,03	839,38	5,16	1592,06	1679,29	5,19	3184,12	3321,49	4,14
6	808,60	855,13	5,44	1617,19	1710,50	5,46	3234,38	3380,69	4,33
7	1103,49	1185,86	6,95	2206,98	2371,20	6,93	4413,95	4667,59	5,43
8	1201,03	1292,38	7,07	2402,06	2584,41	7,06	4804,12	5089,69	5,61
9	1300,18	1410,42	7,82	2600,36	2819,19	7,76	5200,71	5541,51	6,15
10	1306,12	1416,52	7,79	2612,23	2831,39	7,74	5224,46	5565,02	6,12
Max			7,82			7,76			6,15
Form	1/30		$\varepsilon, \%$	1/20		$\varepsilon, \%$	1/15		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	1357,20	1357,20	0,00	2035,80	2000,72	1,75	2714,40	2607,59	4,10
2	3194,96	3194,96	0,00	4792,44	4632,38	3,46	6389,92	5918,33	7,97
3	3411,96	3411,96	0,00	5117,94	4931,15	3,79	6823,92	6273,92	8,77
4	5668,07	5668,07	0,00	8502,10	8074,82	5,29	11336,14	10116,11	12,06
5	6368,25	6368,25	0,00	9552,37	9016,12	5,95	12736,50	11225,40	13,46
6	6468,77	6468,77	0,00	9703,15	9146,15	6,09	12937,54	11363,51	13,85
7	8827,90	8827,90	0,00	13241,85	12324,25	7,45	17655,80	15121,80	16,76
8	9608,24	9608,24	0,00	14412,36	13352,57	7,94	19216,48	16317,53	17,77
9	10401,42	10401,42	0,00	15602,13	14366,70	8,60	20802,84	17449,44	19,22
10	10448,93	10448,93	0,00	15673,39	14443,70	8,51	20897,86	17561,02	19,00
Max			0,00			8,60			19,22
Form	1/12		$\varepsilon, \%$	1/10		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	3393,00	3175,84	6,84	4071,60	3699,32	10,06	8143,20	5985,86	36,04
2	7987,40	7053,39	13,24	9584,88	8035,03	19,29	19169,76	11592,63	65,36
3	8529,90	7443,57	14,59	10235,88	8437,89	21,31	20471,76	11930,59	71,59
4	14170,17	11822,14	19,86	17004,21	13223,00	28,60	34008,42	17783,48	91,24
5	15920,62	13042,11	22,07	19104,75	14512,71	31,64	38209,50	19136,99	99,66
6	16171,92	13172,06	22,77	19406,31	14623,63	32,71	38812,62	19222,27	101,91
7	22069,75	17335,38	27,31	26483,70	19068,76	38,89	52967,40	24204,80	118,83
8	24020,60	18643,03	28,84	28824,72	20448,71	40,96	57649,44	25624,69	124,98
9	26003,55	19831,92	31,12	31204,26	21660,93	44,06	62408,52	26807,54	132,80
10	26122,32	19978,68	30,75	31346,79	21842,94	43,51	62693,58	27201,85	130,48
Max			31,12			44,06			132,80

У таблиці 5.14 зазначені частоти для різних співвідношень h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/5, частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.21 та відносна різниця розрахунків ε у відсотках. Для перших трьох частот розбіжність розрахунків за ЗФ (2.53) і МСЕ для всіх розглянутих співвідношень не перевищують 72%. Необхідно підвищити точність обчислення коефіцієнтів форм коливань і граничних умов для випадку $1/15 \leq h/a \leq 1/10$ та $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. Для цього розрахуємо коефіцієнти на основі частот трикутної пластини (FCC) при $h/a=1/12$ та при $h/a=1/6$ відповідно. У таблиці 5.15 наведено розраховані уточнені коефіцієнти F_i .

Таблиця 5.15

Уточнені коефіцієнти трикутних пластин (FCC) при $h/a=1/12$ та при $h/a=1/6$

i	F_i , при $h/a=1/12$	i	F_i , при $h/a=1/12$	i	F_i , при $h/a=1/6$	i	F_i , при $h/a=1/6$
1	1,686824	6	6,996243	1	1,427034	6	4,829417
2	3,746356	7	9,207560	2	2,855973	7	6,142705
3	3,953598	8	9,902108	3	2,954794	8	6,535957
4	6,279243	9	10,533579	4	4,453129	9	6,856212
5	6,927221	10	10,611529	5	4,823954	10	6,941660

Перші десять частот, розраховані ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами з таблиці 5.15 та МСЕ, наведено в таблиці 5.16 для $1/15 \leq h/a \leq 1/10$ та в таблиці 5.17 для $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. З наведених розрахунків можна побачити зменшення розбіжності між двома розрахунками, що свідчить про підвищення точності розрахунків ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами.

Таблиця 5.16

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (FCC)

Form	1/15		ε , %	1/12		ε , %	1/10		ε , %
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	2540,67	2607,59	2,57	3175,84	3175,84	0,00	3811,01	3699,32	3,02
2	5642,71	5918,33	4,66	7053,39	7053,39	0,00	8464,07	8035,03	5,34
3	5954,86	6273,92	5,09	7443,57	7443,57	0,00	8932,29	8437,89	5,86
4	9457,71	10116,11	6,51	11822,14	11822,14	0,00	14186,57	13223,00	7,29
5	10433,69	11225,40	7,05	13042,11	13042,11	0,00	15650,53	14512,71	7,84
6	10537,65	11363,51	7,27	13172,06	13172,06	0,00	15806,47	14623,63	8,09
7	13868,30	15121,80	8,29	17335,38	17335,38	0,00	20802,46	19068,76	9,09
8	14914,42	16317,53	8,60	18643,03	18643,03	0,00	22371,63	20448,71	9,40
9	15865,54	17449,44	9,08	19831,92	19831,92	0,00	23798,30	21660,93	9,87
10	15982,94	17561,02	8,99	19978,68	19978,68	0,00	23974,42	21842,94	9,76
Max			9,08			0,00			9,87

Таблиця 5.17

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (FCC)

Form	1/8		$\varepsilon, \%$	1/6		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	3Ф (2.53)	МСЕ		3Ф (2.53)	МСЕ		3Ф (2.53)	МСЕ	
1	4030,09	4403,95	8,49	5373,45	5373,45	0,00	6448,14	5985,86	7,72
2	8065,55	9257,41	12,87	10754,07	10754,07	0,00	12904,89	11592,63	11,32
3	8344,63	9660,40	13,62	11126,18	11126,18	0,00	13351,41	11930,59	11,91
4	12576,08	14875,16	15,46	16768,11	16768,11	0,00	20121,73	17783,48	13,15
5	13623,33	16232,64	16,07	18164,44	18164,44	0,00	21797,33	19136,99	13,90
6	13638,76	16297,58	16,31	18185,01	18185,01	0,00	21822,01	19222,27	13,52
7	17347,61	21017,71	17,46	23130,15	23130,15	0,00	27756,18	24204,80	14,67
8	18458,20	22468,98	17,85	24610,93	24610,93	0,00	29533,11	25624,69	15,25
9	19362,63	23686,40	18,25	25816,84	25816,84	0,00	30980,21	26807,54	15,57
10	19603,94	23920,43	18,05	26138,59	26138,59	0,00	31366,31	27201,85	15,31
Max			18,25			0,00			15,57

3Ф (2.53) з таблицями коефіцієнтів форм коливань та граничних умов можна використовувати для швидкого інженерного розрахунку перших десяти частот і форм вільних коливань трикутних пластин (FCC) у вигляді таблиці 5.18.

Таблиця 5.18.

Узагальнення використання 3Ф (2.53) для трикутних пластин (FCC)

$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i$									
i	F_i $h/a \leq 1/15$; $\varepsilon < 20\%$	F_i $1/15 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 10\%$	F_i $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 19\%$	Form	i	F_i $h/a \leq 1/15$; $\varepsilon < 20\%$	F_i $1/15 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 10\%$	F_i $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 19\%$	Form
1	1,802167	1,686824	1,427034		6	8,589599	6,996243	4,829417	
2	4,242449	3,746356	2,855973		7	11,72218 6	9,207560	6,142705	
3	4,530594	3,953598	2,954794		8	12,75836 5	9,902108	6,535957	
4	7,526384	6,279243	4,453129		9	13,81159 5	10,533579	6,856212	
5	8,456123	6,927221	4,823954		10	13,87468 1	10,611529	6,941660	

Для розрахунку перших десяти коефіцієнтів форм коливань і граничних умов алюмінієвої трикутної пластини (ССС) при $h/a=1/20$ використаємо формулу (2.54) та частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.7. Геометрія пластини відповідає геометрії пластини розглянутої в пункті 3.3. Отримані коефіцієнти форм коливань і граничних умов для трикутної

пластини (ССС) наведені в таблиці 5.19. Розраховані частоти вільних коливань трикутних пластини (ССС) різної товщини за ЗФ (2.53) з коефіцієнтами з таблиці 5.19 представлені в таблиці 5.20.

Таблиця 5.19

Коефіцієнти трикутних пластин (ССС) при $h/a=1/20$

i	F_i	i	F_i
1	4,256701	6	12,289473
2	7,762322	7	16,380378
3	7,764704	8	16,383848
4	11,622242	9	17,570642
5	12,287622	10	17,612682

Таблиця 5.20

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (ССС)

Form	1/240		$\varepsilon, \%$	1/120		$\varepsilon, \%$	1/60		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	400,71	430,44	6,91	801,42	862,93	7,13	1602,85	1714,71	6,52
2	730,72	821,63	11,06	1461,44	1646,11	11,22	2922,88	3255,58	10,22
3	730,94	821,64	11,04	1461,89	1646,14	11,19	2923,77	3255,76	10,20
4	1094,08	1283,57	14,76	2188,16	2570,10	14,86	4376,32	5058,42	13,48
5	1156,72	1370,20	15,58	2313,43	2743,09	15,66	4626,86	5392,73	14,20
6	1156,89	1370,22	15,57	2313,78	2743,18	15,65	4627,56	5393,04	14,19
7	1541,99	1903,13	18,98	3083,99	3807,88	19,01	6167,98	7447,32	17,18
8	1542,32	1903,16	18,96	3084,64	3807,98	19,00	6169,28	7447,43	17,16
9	1654,04	2072,72	20,20	3308,08	4145,68	20,20	6616,17	8091,66	18,23
10	1658,00	2074,83	20,09	3316,00	4150,25	20,10	6632,00	8101,38	18,14
Max			20,20			20,20			18,23
Form	1/30		$\varepsilon, \%$	1/20		$\varepsilon, \%$	1/15		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	3205,69	3333,24	3,83	4808,54	4808,54	0,00	6411,39	6098,77	5,13
2	5845,75	6219,63	6,01	8768,63	8768,63	0,00	11691,51	10855,30	7,70
3	5847,55	6220,85	6,00	8771,32	8771,32	0,00	11695,09	10856,36	7,73
4	8752,63	9501,44	7,88	13128,95	13128,95	0,00	17505,27	15942,91	9,80
5	9253,73	10089,85	8,29	13880,59	13880,59	0,00	18507,45	16778,52	10,30
6	9255,12	10091,35	8,29	13882,68	13882,68	0,00	18510,24	16780,59	10,31
7	12335,95	13697,11	9,94	18503,93	18503,93	0,00	24671,91	22023,02	12,03
8	12338,57	13697,91	9,92	18507,85	18507,85	0,00	24677,13	22026,79	12,03
9	13232,33	14791,59	10,54	19848,50	19848,50	0,00	26464,67	23488,63	12,67
10	13263,99	14813,48	10,46	19895,99	19895,99	0,00	26527,99	23555,76	12,62
Max			10,54			0,00			12,67
Form	1/12		$\varepsilon, \%$	1/10		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	8014,23	7214,05	11,09	9617,08	8152,81	17,96	19234,16	11421,79	68,40
2	14614,38	12543,73	16,51	17537,26	13880,63	26,34	35074,52	17988,55	94,98
3	14618,87	12544,41	16,54	17542,64	13881,41	26,38	35085,28	17989,18	95,04
4	21881,58	18121,27	20,75	26257,90	19786,57	32,71	52515,80	24683,53	112,76
5	23134,32	18995,50	21,79	27761,18	20672,01	34,29	55522,36	25526,89	117,51
6	23137,80	18996,53	21,80	27765,36	20672,67	34,31	55530,72	25529,00	117,52
7	30839,88	24630,79	25,21	37007,86	26553,72	39,37	74015,72	31856,46	132,34
8	30846,42	24632,12	25,23	37015,70	26556,86	39,38	74031,40	31857,08	132,39
9	33080,83	26144,78	26,53	39697,00	28087,47	41,33	79394,00	33520,16	136,85
10	33159,98	26241,54	26,36	39791,98	28211,90	41,05	79583,96	33729,05	135,95
Max			26,53			41,33			136,85

У таблиці 5.20 зазначені частоти для різних співвідношень h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/5, частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.24 та відносна різниця розрахунків ε у відсотках. Для перших трьох частот розбіжність розрахунків за ЗФ (2.53) і МСЕ для всіх розглянутих співвідношень не перевищують 96%. Необхідно підвищити точність обчислення коефіцієнтів форм коливань і граничних умов для випадку $1/15 \leq h/a \leq 1/10$ та $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. Для цього розрахуємо коефіцієнти на основі частот трикутної пластини (ССС) при $h/a=1/12$ та при $h/a=1/6$ відповідно. У таблиці 5.21 наведено розраховані уточнені коефіцієнти F_i .

Таблиця 5.21

Уточнені коефіцієнти трикутних пластин (ССС) при $h/a=1/12$ та при $h/a=1/6$

i	F_i , при $h/a=1/12$	i	F_i , при $h/a=1/12$	i	F_i , при $h/a=1/6$	i	F_i , при $h/a=1/6$
1	3,831690	6	10,089867	1	2,833771	6	6,509336
2	6,662510	7	13,082463	2	4,544693	7	8,182128
3	6,662871	8	13,083170	3	4,545670	8	8,183148
4	9,624979	9	13,886608	4	6,281176	9	8,604793
5	10,089320	10	13,938001	5	6,508882	10	8,654813

Перші десять частот, розраховані ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами з таблиці 5.21 та МСЕ, наведено в таблиці 5.22 для $1/15 \leq h/a \leq 1/10$ та в таблиці 5.23 для $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. З наведених розрахунків можна побачити зменшення розбіжності між двома розрахунками, що свідчить про підвищення точності розрахунків ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами.

Таблиця 5.22

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (ССС)

Form	1/15		ε , %	1/12		ε , %	1/10		ε , %
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	5771,24	6098,77	5,37	7214,05	7214,05	0,00	8656,86	8152,81	6,18
2	10034,98	10855,30	7,56	12543,73	12543,73	0,00	15052,48	13880,63	8,44
3	10035,53	10856,36	7,56	12544,41	12544,41	0,00	15053,29	13881,41	8,44
4	14497,02	15942,91	9,07	18121,27	18121,27	0,00	21745,52	19786,57	9,90
5	15196,40	16778,52	9,43	18995,50	18995,50	0,00	22794,60	20672,01	10,27
6	15197,22	16780,59	9,44	18996,53	18996,53	0,00	22795,84	20672,67	10,27
7	19704,63	22023,02	10,53	24630,79	24630,79	0,00	29556,95	26553,72	11,31
8	19705,70	22026,79	10,54	24632,12	24632,12	0,00	29558,54	26556,86	11,30
9	20915,82	23488,63	10,95	26144,78	26144,78	0,00	31373,74	28087,47	11,70
10	20993,23	23555,76	10,88	26241,54	26241,54	0,00	31489,85	28211,90	11,62
Max			10,95			0,00			11,70

Таблиця 5.23

Перші десять частот вільних коливань трикутних пластини (ССС)

Form	1/8		$\varepsilon, \%$	1/6		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	8002,85	9300,97	13,96	10670,47	10670,47	0,00	12804,56	11421,79	12,11
2	12834,67	15415,98	16,74	17112,89	17112,89	0,00	20535,47	17988,55	14,16
3	12837,43	15418,48	16,74	17116,57	17116,57	0,00	20539,88	17989,18	14,18
4	17738,67	21645,34	18,05	23651,56	23651,56	0,00	28381,87	24683,53	14,98
5	18381,73	22524,17	18,39	24508,98	24508,98	0,00	29410,77	25526,89	15,21
6	18383,02	22527,05	18,40	24510,69	24510,69	0,00	29412,83	25529,00	15,21
7	23107,15	28639,81	19,32	30809,53	30809,53	0,00	36971,44	31856,46	16,06
8	23110,03	28641,80	19,31	30813,37	30813,37	0,00	36976,05	31857,08	16,07
9	24300,80	30189,87	19,51	32401,06	32401,06	0,00	38881,27	33520,16	15,99
10	24442,06	30345,99	19,46	32589,41	32589,41	0,00	39107,29	33729,05	15,95
Max			19,51			0,00			16,07

ЗФ (2.53) з таблицями коефіцієнтів форм коливань та граничних умов можна використовувати для швидкого інженерного розрахунку перших десяти частот і форм вільних коливань трикутних пластин (ССС) у вигляді таблиці 5.24.

Таблиця 5.24.

Узагальнення використання ЗФ (2.53) для трикутних пластин (ССС)

$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i$									
i	F_i $h/a \leq 1/15$; $\varepsilon < 21\%$	F_i $1/15 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 12\%$	F_i $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 20\%$	Form	i	F_i $h/a \leq 1/15$; $\varepsilon < 21\%$	F_i $1/15 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 12\%$	F_i $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 20\%$	Form
1	4,256701	3,831690	2,833771		6	12,289473	10,089867	6,509336	
2	7,762322	6,662510	4,544693		7	16,380378	13,082463	8,182128	
3	7,764704	6,662871	4,545670		8	16,383848	13,083170	8,183148	
4	11,622242	9,624979	6,281176		9	17,570642	13,886608	8,604793	
5	12,287622	10,089320	6,508882		10	17,612682	13,938001	8,654813	

5.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань чотирикутних пластин різної товщини

Для розрахунку перших десяти коефіцієнтів форм коливань і граничних умов алюмінієвої чотирикутної пластини (FFFF) при $h/a=1/60$ використаємо формулу (2.54) та частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.30. Геометрія пластини

відповідає геометрії пластини розглянутої в пункті 3.4. Отримані коефіцієнти чотирикутної пластини (FFFF) наведені в таблиці 5.25. Розраховані частоти вільних коливань чотирикутних пластин (FFFF) різної товщини за ЗФ (2.53) з коефіцієнтами з таблиці 5.25 представлені в таблиці 5.26.

Таблиця 5.25

Коефіцієнти чотирикутних пластин (FFFF) при $h/a=1/60$

i	F_i	i	F_i
1	0,602581	6	2,788977
2	0,883450	7	2,788977
3	1,119542	8	2,858344
4	1,564082	9	3,107609
5	1,564082	10	3,512340

Таблиця 5.26

Перші десять частот вільних коливань чотирикутних пластини (FFFF)

Form	1/240		$\varepsilon, \%$	1/120		$\varepsilon, \%$	1/60		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	56,72	57,01	0,51	113,45	113,86	0,36	226,90	226,90	0,00
2	83,17	83,28	0,13	166,33	166,46	0,08	332,66	332,66	0,00
3	105,39	105,55	0,15	210,78	210,98	0,09	421,56	421,56	0,00
4	147,24	148,10	0,58	294,47	295,70	0,42	588,95	588,95	0,00
5	147,24	148,10	0,58	294,47	295,70	0,42	588,95	588,95	0,00
6	262,55	263,48	0,35	525,09	526,30	0,23	1050,18	1050,18	0,00
7	262,55	263,48	0,35	525,09	526,30	0,23	1050,18	1050,18	0,00
8	269,07	271,34	0,84	538,15	541,36	0,59	1076,30	1076,30	0,00
9	292,54	294,71	0,74	585,08	588,03	0,50	1170,16	1170,16	0,00
10	330,64	332,65	0,60	661,28	664,07	0,42	1322,56	1322,56	0,00
Max			0,84			0,59			0,00
Form	1/30		$\varepsilon, \%$	1/20		$\varepsilon, \%$	1/15		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	453,80	449,84	0,88	680,70	668,43	1,84	907,60	882,60	2,83
2	665,32	663,35	0,30	997,98	990,25	0,78	1330,64	1309,94	1,58
3	843,12	840,04	0,37	1264,68	1252,75	0,95	1686,24	1655,78	1,84
4	1177,90	1164,81	1,12	1766,85	1723,46	2,52	2355,80	2260,39	4,22
5	1177,90	1164,81	1,12	1766,85	1723,46	2,52	2355,80	2260,39	4,22
6	2100,36	2080,77	0,94	3150,54	3075,13	2,45	4200,72	4014,17	4,65
7	2100,36	2080,77	0,94	3150,54	3075,13	2,45	4200,72	4014,17	4,65
8	2152,60	2116,42	1,71	3228,90	3107,25	3,92	4305,20	4036,82	6,65
9	2340,32	2304,30	1,56	3510,48	3384,89	3,71	4680,64	4391,58	6,58
10	2645,12	2607,43	1,45	3967,68	3831,66	3,55	5290,24	4973,79	6,36
Max			1,71			3,92			6,65
Form	1/12		$\varepsilon, \%$	1/10		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	1134,50	1090,90	4,00	1361,40	1293,50	5,25	2722,80	2378,91	14,46
2	1663,30	1624,00	2,42	1995,96	1929,81	3,43	3991,92	3549,25	12,47
3	2107,80	2049,62	2,84	2529,36	2431,41	4,03	5058,72	4418,69	14,48
4	2944,75	2773,83	6,16	3533,70	3261,71	8,34	7067,40	5637,38	25,37
5	2944,75	2773,83	6,16	3533,70	3261,71	8,34	7067,40	5637,38	25,37
6	5250,90	4899,93	7,16	6301,08	5700,59	10,53	12602,16	9237,68	36,42
7	5250,90	4899,93	7,16	6301,08	5722,55	10,11	12602,16	9367,12	34,54
8	5381,50	4902,12	9,78	6457,80	5722,55	12,85	12915,60	9367,12	37,88
9	5850,80	5328,71	9,80	7020,96	6188,09	13,46	14041,92	9856,06	42,47
10	6612,80	6032,48	9,62	7935,36	7000,90	13,35	15870,72	11129,34	42,60
Max			9,80			13,46			42,60

У таблиці 5.26 зазначені частоти для різних співвідношень h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/5, частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.35 та відносна різниця розрахунків ε у відсотках. Для перших трьох частот розбіжність розрахунків за ЗФ (2.53) і МСЕ для всіх розглянутих співвідношень не перевищують 15%. Необхідно підвищити точність обчислення коефіцієнтів форм коливань і граничних умов для випадку $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. Для цього розрахуємо коефіцієнти на основі частот чотирикутної пластини (FFFF) при $h/a=1/6$. У таблиці 5.27 наведено розраховані уточнені коефіцієнти F_i .

Таблиця 5.27

Уточнені коефіцієнти чотирикутних пластин (FFFF) при $h/a=1/6$

i	F_i , при $h/a=1/6$	i	F_i , при $h/a=1/6$
1	0,542416	6	2,196065
2	0,810874	7	2,225368
3	1,013609	8	2,225368
4	1,313779	9	2,360217
5	1,313779	10	2,664594

Перші десять частот, розраховані ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами з таблиці 5.27 та МСЕ, наведено в таблиці 5.28 для $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. З наведених розрахунків можна побачити зменшення розбіжності між двома розрахунками, що свідчить про підвищення точності розрахунків ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами.

Таблиця 5.28

Перші десять частот вільних коливань чотирикутних пластини (FFFF)

Form	1/8		ε , %	1/6		ε , %	1/5		ε , %
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	1531,84	1586,07	3,42	2042,45	2042,45	0,00	2450,94	2378,91	3,03
2	2289,99	2372,55	3,48	3053,32	3053,32	0,00	3663,98	3549,25	3,23
3	2862,53	2980,09	3,94	3816,71	3816,71	0,00	4580,05	4418,69	3,65
4	3710,24	3945,23	5,96	4946,99	4946,99	0,00	5936,39	5637,38	5,30
5	3710,24	3945,23	5,96	4946,99	4946,99	0,00	5936,39	5637,38	5,30
6	6201,91	6779,49	8,52	8269,21	8269,21	0,00	9923,05	9237,68	7,42
7	6284,66	6840,19	8,12	8379,55	8379,55	0,00	10055,46	9367,12	7,35
8	6284,66	6840,19	8,12	8379,55	8379,55	0,00	10055,46	9367,12	7,35
9	6665,49	7340,34	9,19	8887,32	8887,32	0,00	10664,78	9856,06	8,21
10	7525,08	8292,73	9,26	10033,44	10033,44	0,00	12040,13	11129,34	8,18
Max			9,26			0,00			8,21

ЗФ (2.53) з таблицями коефіцієнтів форм коливань та граничних умов можна використовувати для швидкого інженерного розрахунку перших десяти частот і форм вільних коливань чотирикутних пластин (FFFF) у вигляді таблиці 5.29.

Таблиця 5.29.

Узагальнення використання ЗФ (2.53) для чотирикутних пластин (FFFF)

$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i$							
i	F_i $1/120 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 14\%$	F_i $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 10\%$	Form	i	F_i $1/120 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 14\%$	F_i $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 10\%$	Form
1	0,602581	0,542416		6	2,788977	2,196065	
2	0,883450	0,810874		7	2,788977	2,225368	
3	1,119542	1,013609		8	2,858344	2,225368	
4	1,564082	1,313779		9	3,107609	2,360217	
5	1,564082	1,313779		10	3,512340	2,664594	

Для розрахунку перших десяти коефіцієнтів форм коливань і граничних умов алюмінієвої чотирикутної пластини (CCCC) [262] при $h/a=1/60$ використаємо формулу (2.54) та частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.38. Геометрія пластини відповідає геометрії пластини розглянутої в пункті 3.4. Отримані коефіцієнти чотирикутної пластини (CCCC) наведені в таблиці 5.30. Розраховані частоти вільних коливань чотирикутних пластин (CCCC) різної товщини за ЗФ (2.53) з коефіцієнтами з таблиці 5.30 представлені в таблиці 5.31.

Таблиця 5.30

Коефіцієнти чотирикутних пластин (CCCC) при $h/a=1/60$

i	F_i	i	F_i
1	1,651269	6	6,033223
2	3,359876	7	7,509136
3	3,359876	8	7,509136
4	4,941326	9	9,566517
5	6,003612	10	9,566517

Таблиця 5.31

Перші десять частот вільних коливань чотирикутних пластини (CCCC)

Form	1/240		$\varepsilon, \%$	1/120		$\varepsilon, \%$	1/60		$\varepsilon, \%$
	3Ф (2.53)	MCE		3Ф (2.53)	MCE		3Ф (2.53)	MCE	
1	155,44	155,61	0,11	310,89	311,01	0,04	621,78	621,78	0,00
2	316,29	317,34	0,33	632,58	633,90	0,21	1265,15	1265,15	0,00
3	316,29	317,34	0,33	632,58	633,90	0,21	1265,15	1265,15	0,00
4	465,16	467,73	0,55	930,32	933,80	0,37	1860,64	1860,64	0,00
5	565,16	568,89	0,66	1130,32	1135,43	0,45	2260,64	2260,64	0,00
6	567,95	571,60	0,64	1135,90	1140,88	0,44	2271,79	2271,79	0,00
7	706,89	712,99	0,86	1413,77	1422,30	0,60	2827,54	2827,54	0,00
8	706,89	712,99	0,86	1413,77	1422,30	0,60	2827,54	2827,54	0,00
9	900,56	910,12	1,05	1801,12	1814,56	0,74	3602,24	3602,24	0,00
10	900,56	910,12	1,05	1801,12	1814,56	0,74	3602,24	3602,24	0,00
Max			1,05			0,74			0,00
Form	1/30		$\varepsilon, \%$	1/20		$\varepsilon, \%$	1/15		$\varepsilon, \%$
	3Ф (2.53)	MCE		3Ф (2.53)	MCE		3Ф (2.53)	MCE	
1	1243,56	1232,86	0,87	1865,34	1825,70	2,17	2487,12	2386,70	4,21
2	2530,30	2490,41	1,60	3795,45	3648,64	4,02	5060,60	4703,27	7,60
3	2530,30	2490,41	1,60	3795,45	3648,64	4,02	5060,60	4703,27	7,60
4	3721,28	3638,39	2,28	5581,92	5277,68	5,76	7442,56	6729,68	10,59
5	4521,28	4405,27	2,63	6781,92	6363,18	6,58	9042,56	8058,86	12,21
6	4543,58	4429,49	2,58	6815,37	6403,63	6,43	9087,16	8118,75	11,93
7	5655,08	5478,34	3,23	8482,62	7845,52	8,12	11310,16	9860,05	14,71
8	5655,08	5478,34	3,23	8482,62	7845,52	8,12	11310,16	9860,05	14,71
9	7204,48	6937,13	3,85	10806,72	9865,59	9,54	14408,96	12273,91	17,40
10	7204,48	6937,13	3,85	10806,72	9865,59	9,54	14408,96	12273,91	17,40
Max			3,85			9,54			17,40
Form	1/12		$\varepsilon, \%$	1/10		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	3Ф (2.53)	MCE		3Ф (2.53)	MCE		3Ф (2.53)	MCE	
1	3108,90	2912,30	6,75	3730,68	3399,64	9,74	7461,36	5552,12	34,39
2	6325,75	5649,10	11,98	7590,90	6485,93	17,04	15181,80	9690,85	56,66
3	6325,75	5649,10	11,98	7590,90	6485,93	17,04	15181,80	9690,85	56,66
4	9303,20	7994,15	16,38	11163,84	9082,46	22,92	22327,68	13007,50	71,65
5	11303,20	9501,95	18,96	13563,84	10714,38	26,59	27127,68	14839,44	82,81
6	11358,95	9583,58	18,53	13630,74	10818,69	25,99	27261,48	15047,78	81,17
7	14137,70	11545,08	22,46	16965,24	12941,85	31,09	33930,48	17595,78	92,83
8	14137,70	11545,08	22,46	16965,24	12941,85	31,09	33930,48	17595,78	92,83
9	18011,20	14226,11	26,61	21613,44	15796,94	36,82	43226,88	20728,32	108,54
10	18011,20	14226,11	26,61	21613,44	15796,94	36,82	43226,88	20728,32	108,54
Max			26,61			36,82			108,54

Для підвищення точності розрахунків, для випадку $1/8 \leq h/a \leq 1/5$, розрахуємо коефіцієнти на основі частот чотирикутної пластини (CCCC) при $h/a=1/6$. У таблиці 5.32 наведено розраховані уточнені коефіцієнти F_i .

Таблиця 5.32

Уточнені коефіцієнти чотирикутних пластин (CCCC) при $h/a=1/6$

i	F_i при $h/a=1/6$	i	F_i при $h/a=1/6$
1	1,319544	6	3,736745
2	2,363845	7	4,391004
3	2,363845	8	4,391004
4	3,205927	9	5,215685
5	3,688204	10	5,215685

Перші десять частот, розраховані ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами з таблиці 5.32 та МСЕ, наведено в таблиці 5.33 для $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. З наведених розрахунків можна побачити зменшення розбіжності між двома розрахунками, що свідчить про підвищення точності розрахунків ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами.

Таблиця 5.33

Перші десять частот вільних коливань чотирикутних пластини (CCCC)

Form	1/8		$\varepsilon, \%$	1/6		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	3726,52	4053,78	8,07	4968,70	4968,70	0,00	5962,44	5552,12	7,39
2	6675,73	7543,44	11,50	8900,98	8900,98	0,00	10681,18	9690,85	10,22
3	6675,73	7543,44	11,50	8900,98	8900,98	0,00	10681,18	9690,85	10,22
4	9053,86	10420,75	13,12	12071,81	12071,81	0,00	14486,17	13007,50	11,37
5	10415,86	12158,12	14,33	13887,81	13887,81	0,00	16665,37	14839,44	12,30
6	10552,94	12294,63	14,17	14070,59	14070,59	0,00	16884,71	15047,78	12,21
7	12400,63	14593,79	15,03	16534,18	16534,18	0,00	19841,02	17595,78	12,76
8	12400,63	14593,79	15,03	16534,18	16534,18	0,00	19841,02	17595,78	12,76
9	14729,62	17587,64	16,25	19639,49	19639,49	0,00	23567,39	20728,32	13,70
10	14729,62	17587,64	16,25	19639,49	19639,49	0,00	23567,39	20728,32	13,70
Max			16,25			0,00			13,70

ЗФ (2.53) з таблицями коефіцієнтів форм коливань та граничних умов можна використовувати для швидкого інженерного розрахунку перших десяти частот і форм вільних коливань чотирикутних пластин (CCCC) у вигляді таблиці 5.34.

Таблиця 5.34.

Узагальнення використання ЗФ (2.53) для чотирикутних пластин (CCCC)

$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i$							
i	F_b $1/120 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 37\%$	F_b $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 17\%$	Form	i	F_b $1/120 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 37\%$	F_b $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 17\%$	Form
1	0,602581	0,542416		6	2,788977	2,196065	
2	0,883450	0,810874		7	2,788977	2,225368	
3	1,119542	1,013609		8	2,858344	2,225368	
4	1,564082	1,313779		9	3,107609	2,360217	
5	1,564082	1,313779		10	3,512340	2,664594	

5.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань п'ятикутних пластин різної товщини

Для розрахунку перших десяти коефіцієнтів форм коливань і граничних умов алюмінієвої п'ятикутної пластини (FFFFF) при $h/a=1/60$ [268, 278] використаємо формулу (2.54) та частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.41. Геометрія пластини відповідає геометрії пластини розглянутої в пункті 3.5. Отримані коефіцієнти п'ятикутної пластини (FFFFF) наведені в таблиці 5.35. Розраховані частоти вільних коливань п'ятикутних пластин (FFFFF) різної товщини за ЗФ (2.53) з коефіцієнтами з таблиці 5.35 представлені в таблиці 5.36.

Таблиця 5.35

Коефіцієнти п'ятикутних пластин (FFFFF) при $h/a=1/60$

i	F_i	i	F_i
1	0,425419	6	1,455596
2	0,425711	7	1,455809
3	0,724054	8	1,975877
4	1,007285	9	1,976727
5	1,007445	10	2,346057

У таблиці 5.36 зазначені частоти для різних співвідношень h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/5, частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.42 та відносна різниця розрахунків ε у відсотках. Для перших трьох частот розбіжність розрахунків за ЗФ (2.53) і МСЕ для всіх розглянутих співвідношень не перевищують 10%. Необхідно підвищити точність обчислення коефіцієнтів форм коливань і граничних умов для випадку $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. Для цього розрахуємо коефіцієнти на основі частот п'ятикутної пластини (FFFFF) при $h/a=1/6$. У таблиці 5.37 наведено розраховані уточнені коефіцієнти F_i .

Таблиця 5.36

Перші десять частот вільних коливань п'ятикутних пластин (FFFFF)

Form	1/240		$\varepsilon, \%$	1/120		$\varepsilon, \%$	1/60		$\varepsilon, \%$
	3Ф (2.53)	МСЕ		3Ф (2.53)	МСЕ		3Ф (2.53)	МСЕ	
1	40,05	40,28	0,57	80,10	80,28	0,22	160,19	160,19	0,00
2	40,08	40,35	0,67	80,15	80,31	0,20	160,30	160,30	0,00
3	68,16	68,43	0,39	136,32	136,57	0,18	272,64	272,64	0,00
4	94,82	95,38	0,59	189,64	190,20	0,29	379,29	379,29	0,00
5	94,84	95,61	0,81	189,68	190,32	0,34	379,35	379,35	0,00
6	137,02	137,84	0,59	274,05	275,01	0,35	548,10	548,10	0,00
7	137,05	137,95	0,65	274,09	275,04	0,35	548,18	548,18	0,00
8	186,00	187,45	0,77	372,00	373,73	0,46	744,01	744,01	0,00
9	186,08	187,50	0,76	372,16	373,75	0,43	744,33	744,33	0,00
10	220,85	222,62	0,80	441,70	443,94	0,50	883,40	883,40	0,00
Max			0,81			0,50			0,00
Form	1/30		$\varepsilon, \%$	1/20		$\varepsilon, \%$	1/15		$\varepsilon, \%$
	3Ф (2.53)	МСЕ		3Ф (2.53)	МСЕ		3Ф (2.53)	МСЕ	
1	320,38	318,97	0,44	480,57	476,00	0,96	640,76	630,98	1,55
2	320,60	318,98	0,51	480,90	476,02	1,03	641,20	631,00	1,62
3	545,28	544,28	0,18	817,92	813,47	0,55	1090,56	1079,20	1,05
4	758,58	753,52	0,67	1137,87	1120,67	1,53	1517,16	1479,06	2,58
5	758,70	753,64	0,67	1138,05	1120,82	1,54	1517,40	1479,24	2,58
6	1096,20	1087,64	0,79	1644,30	1613,68	1,90	2192,40	2122,86	3,28
7	1096,36	1087,66	0,80	1644,54	1613,72	1,91	2192,72	2122,90	3,29
8	1488,02	1477,17	0,73	2232,03	2189,09	1,96	2976,04	2873,76	3,56
9	1488,66	1444,36	3,07	2232,99	2189,37	1,99	2977,32	2874,11	3,59
10	1766,80	1744,43	1,28	2650,20	2571,11	3,08	3533,60	3356,22	5,29
Max			3,07			3,08			5,29
Form	1/12		$\varepsilon, \%$	1/10		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	3Ф (2.53)	МСЕ		3Ф (2.53)	МСЕ		3Ф (2.53)	МСЕ	
1	800,95	782,88	2,31	961,14	933,56	2,95	1922,28	1763,64	9,00
2	801,50	783,06	2,35	961,80	933,59	3,02	1923,60	1763,96	9,05
3	1363,20	1335,32	2,09	1635,84	1596,44	2,47	3271,68	2980,17	9,78
4	1896,45	1821,79	4,10	2275,74	2163,73	5,18	4551,48	3898,10	16,76
5	1896,75	1822,12	4,10	2276,10	2163,97	5,18	4552,20	3898,73	16,76
6	2740,50	2604,61	5,22	3288,60	3079,60	6,79	6577,20	5374,48	22,38
7	2740,90	2604,79	5,23	3289,08	3079,66	6,80	6578,16	5374,58	22,39
8	3720,05	3504,42	6,15	4464,06	4142,44	7,76	8928,12	7031,55	26,97
9	3721,65	3505,02	6,18	4465,98	4142,91	7,80	8931,96	7032,34	27,01
10	4417,00	4085,04	8,13	5300,40	4783,30	10,81	10600,80	7908,13	34,05
Max			8,13			10,81			34,05

Таблиця 5.37

Уточнені коефіцієнти п'ятикутних пластин (FFFFF) при $h/a=1/6$

i	F_i , при $h/a=1/6$	i	F_i , при $h/a=1/6$
1	0,398543	6	1,248507
2	0,398620	7	1,248536
3	0,676607	8	1,648210
4	0,895576	9	1,648409
5	0,895730	10	1,868589

Перші десять частот, розраховані 3Ф (2.53) за уточненими коефіцієнтами з таблиці 5.37 та МСЕ, наведено в таблиці 5.38 для $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. З наведених розрахунків можна побачити зменшення розбіжності між двома розрахунками.

Таблиця 5.38

Перші десять частот вільних коливань п'ятикутних пластин (FFFFF)

Form	1/8		$\varepsilon, \%$	1/6		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	1125,53	1152,56	2,35	1500,70	1500,70	0,00	1800,84	1763,64	2,11
2	1125,74	1152,69	2,34	1500,99	1500,99	0,00	1801,19	1763,96	2,11
3	1910,81	1966,62	2,84	2547,74	2547,74	0,00	3057,29	2980,17	2,59
4	2529,20	2642,57	4,29	3372,26	3372,26	0,00	4046,71	3898,10	3,81
5	2529,63	2643,15	4,29	3372,84	3372,84	0,00	4047,41	3898,73	3,81
6	3525,91	3733,61	5,56	4701,21	4701,21	0,00	5641,45	5374,48	4,97
7	3525,99	3734,00	5,57	4701,32	4701,32	0,00	5641,58	5374,58	4,97
8	4654,71	4987,40	6,67	6206,28	6206,28	0,00	7447,54	7031,55	5,92
9	4655,27	4988,99	6,69	6207,03	6207,03	0,00	7448,44	7032,34	5,92
10	5277,08	5719,52	7,74	7036,11	7036,11	0,00	8443,33	7908,13	6,77
Max			7,74			0,00			6,77

ЗФ (2.53) з таблицями коефіцієнтів форм коливань та граничних умов можна використовувати для швидкого інженерного розрахунку перших десяти частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин (FFFFF) у вигляді таблиці 5.39.

Таблиця 5.39.

Узагальнення використання ЗФ (2.53) для п'ятикутних пластин (FFFFF)

$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i$							
i	F_b $1/120 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 11\%$	F_b $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 8\%$	Form	i	F_b $1/120 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 11\%$	F_b $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 8\%$	Form
1	0,425419	0,398543		6	1,455596	1,248507	
2	0,425711	0,398620		7	1,455809	1,248536	
3	0,724054	0,676607		8	1,975877	1,648210	
4	1,007285	0,895576		9	1,976727	1,648409	
5	1,007445	0,895730		10	2,346057	1,868589	

Для розрахунку перших десяти коефіцієнтів форм коливань і граничних умов алюмінієвої п'ятикутної пластини (FFFFC) при $h/a=1/60$ використаємо формулу (2.54) та частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.41. Геометрія пластини відповідає геометрії пластини розглянутої в пункті 3.5. Отримані коефіцієнти п'ятикутної пластини (FFFFC) наведені в таблиці 5.40.

Розраховані частоти вільних коливань п'ятикутних пластин (FFFFC) різної товщини [270] за ЗФ (2.53) з коефіцієнтами з таблиці 5.40 представлені в таблиці 5.41.

Таблиця 5.40

Коефіцієнти п'ятикутних пластин (FFFFC) при $h/a=1/60$

i	F_i	i	F_i
1	0,083416	6	1,168540
2	0,205712	7	1,357707
3	0,432695	8	1,800866
4	0,742139	9	2,044979
5	0,853228	10	2,103936

Таблиця 5.41

Перші десять частот вільних коливань п'ятикутних пластин (FFFFC)

Форма	1/240		$\varepsilon, \%$	1/120		$\varepsilon, \%$	1/60		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	7,85	7,87	0,25	15,71	15,73	0,13	31,41	31,41	0,00
2	19,37	19,45	0,41	38,73	38,82	0,23	77,46	77,46	0,00
3	40,73	40,96	0,56	81,46	81,72	0,32	162,93	162,93	0,00
4	69,86	70,18	0,46	139,72	140,00	0,20	279,45	279,45	0,00
5	80,32	81,01	0,85	160,64	161,14	0,31	321,28	321,28	0,00
6	110,00	111,33	1,19	220,00	220,95	0,43	440,01	440,01	0,00
7	127,81	129,32	1,17	255,62	256,69	0,42	511,24	511,24	0,00
8	169,53	171,83	1,34	339,06	340,51	0,43	678,11	678,11	0,00
9	192,51	195,71	1,64	385,02	386,78	0,46	770,03	770,03	0,00
10	198,06	201,01	1,47	396,12	398,39	0,57	792,23	792,23	0,00
Мах			1,64			0,57			0,00
Форма	1/30		$\varepsilon, \%$	1/20		$\varepsilon, \%$	1/15		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	62,82	62,69	0,21	94,23	93,84	0,42	125,64	124,92	0,58
2	154,92	154,31	0,40	232,38	230,25	0,93	309,84	305,32	1,48
3	325,86	324,02	0,57	488,79	482,52	1,30	651,72	638,48	2,07
4	558,90	556,52	0,43	838,35	829,62	1,05	1117,80	1097,60	1,84
5	642,56	639,11	0,54	963,84	951,15	1,33	1285,12	1256,10	2,31
6	880,02	872,50	0,86	1320,03	1293,38	2,06	1760,04	1701,23	3,46
7	1022,48	1013,98	0,84	1533,72	1503,25	2,03	2044,96	1976,76	3,45
8	1356,22	1344,53	0,87	2034,33	1990,54	2,20	2712,44	2610,30	3,91
9	1540,06	1525,16	0,98	2310,09	2255,08	2,44	3080,12	2953,62	4,28
10	1584,46	1565,13	1,24	2376,69	2307,19	3,01	3168,92	3013,89	5,14
Мах			1,24			3,01			5,14
Форма	1/12		$\varepsilon, \%$	1/10		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	157,05	155,72	0,85	188,46	186,36	1,13	376,92	365,86	3,02
2	387,30	378,83	2,24	464,76	450,95	3,06	929,52	846,00	9,87
3	814,65	790,49	3,06	977,58	938,87	4,12	1955,16	1735,92	12,63
4	1397,25	1358,50	2,85	1676,70	1611,68	4,03	3353,40	2936,22	14,21
5	1606,40	1551,07	3,57	1927,68	1835,64	5,01	3855,36	3286,74	17,30
6	2200,05	2091,31	5,20	2640,06	2463,79	7,15	5280,12	4296,46	22,89
7	2556,20	2429,55	5,21	3067,44	2861,02	7,21	6134,88	4965,83	23,54
8	3390,55	3196,48	6,07	4068,66	3747,33	8,57	8137,32	6308,95	28,98
9	3850,15	3613,96	6,54	4620,18	4233,98	9,12	9240,36	7077,79	30,55
10	3961,15	3675,43	7,77	4753,38	4292,24	10,74	9506,76	7102,71	33,85
Мах			7,77			10,74			33,85

Представлені в таблиці 5.41 результати дають можливість встановити межі застосування ЗФ (2.53) для розрахунку частот вільних коливань

п'ятикутних пластин з жорстко закріпленим одним краєм, а саме: для перших десяти частот при $h/a \leq 1/30$ відхилення між розрахованими частотами ЗФ (2.53) та частотами розрахованими МСЕ становить $\varepsilon < 1,5\%$, при $h/a \leq 1/10$ це відхилення становить $\varepsilon < 11\%$, а для перших трьох частот при $h/a \leq 1/5$ відхилення становить $\varepsilon < 13\%$.

Для підвищення точності розрахунків ЗФ (2.53) проведемо додаткове уточнення коефіцієнтів форм коливань і граничних умов для п'ятикутних пластин із співвідношеннями $h/a \geq 1/10$, взявши за основу розраховані частоти МСЕ для пластини із співвідношенням $h/a = 1/8$, в результаті чого отримаємо додаткові коефіцієнти, які представлені в таблиці 5.42.

Таблиця 5.42

Уточнені коефіцієнти п'ятикутних пластин (FFFFC) при $h/a = 1/6$

i	F_i	i	F_i
1	0,082154	6	1,057679
2	0,196919	7	1,227074
3	0,408544	8	1,595584
4	0,699589	9	1,800882
5	0,793506	10	1,817078

Розрахуємо МСЕ та ЗФ (2.53) з коефіцієнтами з таблиці 5.42 частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з жорстко закріпленим одним краєм з відношеннями товщини пластини до сторони пластини h/a : 1/10, 1/8, 1/5. Розраховані перші десять частот разом з відповідними частотами, отриманими МСЕ, представлені в таблиці 5.43.

Результати в таблиці 5.43 показують, що проведені уточнення коефіцієнтів значно покращили розрахунки за ЗФ (2.53), при цьому для перших десяти частот при $h/a \leq 1/10$ відхилення між розрахованими частотами ЗФ (2.53) в порівнянні з частотами розрахованими МСЕ становить $\varepsilon < 4,5\%$, а для частот при $h/a \leq 1/5$ це відхилення становить $\varepsilon < 16\%$, що в обох випадках більш ніж в два рази є покращеним результатом. Для перших трьох частот при $h/a \leq 1/5$ відхилення становить $\varepsilon < 6,5\%$.

Перші десять частот вільних коливань п'ятикутних пластин (FFFFC)

Форма	1/10		$\varepsilon, \%$	1/8		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	185,61	186,36	0,40	232,01	232,01	0,00	371,22	365,86	1,47
2	444,90	450,95	1,34	556,12	556,12	0,00	889,79	846,00	5,18
3	923,02	938,87	1,69	1153,77	1153,77	0,00	1846,03	1735,92	6,34
4	1580,57	1611,68	1,93	1975,71	1975,71	0,00	3161,13	2936,22	7,66
5	1792,75	1835,64	2,34	2240,94	2240,94	0,00	3585,50	3286,74	9,09
6	2389,59	2463,79	3,01	2986,99	2986,99	0,00	4779,19	4296,46	11,24
7	2772,30	2861,02	3,10	3465,38	3465,38	0,00	5544,61	4965,83	11,66
8	3604,87	3747,33	3,80	4506,09	4506,09	0,00	7209,74	6308,95	14,28
9	4068,70	4233,98	3,90	5085,87	5085,87	0,00	8137,39	7077,79	14,97
10	4105,29	4292,24	4,36	5131,61	5131,61	0,00	8210,58	7102,71	15,60
Max			4,36			0,00			15,60

ЗФ (2.53) з таблицями коефіцієнтів форм коливань та граничних умов можна використовувати для швидкого інженерного розрахунку перших десяти частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин (FFFFC) у вигляді таблиці 5.44.

Таблиця 5.44

Узагальнення використання ЗФ (2.53) для п'ятикутних пластин (FFFFC)

$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i$							
i	F_b $1/240 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 8,5\%$	F_b $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 6,5\%$	Form	i	F_b $1/240 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 8,5\%$	F_b $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 6,5\%$	Form
1	0,083416	0,082154		6	1,168540	1,057679	
2	0,205712	0,196919		7	1,357707	1,227074	
3	0,432695	0,408544		8	1,800866	1,595584	
4	0,742139	0,699589		9	2,044979	1,800882	
5	0,853228	0,793506		10	2,103936	1,817078	

5.4. Розрахунок частот та форм вільних коливань шестикутних пластин різної товщини

Для розрахунку перших десяти коефіцієнтів форм коливань і граничних умов алюмінієвої шестикутної пластини (FFFFFF) [271] при $h/a=1/60$ використаємо формулу (2.54) та частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.46. Геометрія пластини

відповідає геометрії пластини розглянутої в пункті 3.6. Отримані коефіцієнти наведені в таблиці 5.45. Розраховані частоти вільних коливань шестикутних пластин (FFFFFF) різної товщини за ЗФ (2.53) з коефіцієнтами з таблиці 5.45 представлені в таблиці 5.46.

Таблиця 5.45

Коефіцієнти шестикутних пластин (FFFFFF) при $h/a=1/60$

i	F_i	i	F_i
1	0,287401	6	1,090808
2	0,287401	7	1,091472
3	0,493325	8	1,156988
4	0,612540	9	1,157147
5	0,726842	10	1,819828

Таблиця 5.46

Перші десять частот вільних коливань шестикутних пластин (FFFFFF)

Form	1/240		$\varepsilon, \%$	1/120		$\varepsilon, \%$	1/60		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	27,05	27,10	0,18	54,11	54,17	0,11	108,22	108,22	0,00
2	27,05	27,10	0,18	54,11	54,17	0,11	108,22	108,22	0,00
3	46,44	46,49	0,11	92,88	92,96	0,09	185,76	185,76	0,00
4	57,66	57,89	0,40	115,32	115,65	0,29	230,65	230,65	0,00
5	68,42	68,54	0,18	136,84	137,04	0,15	273,69	273,69	0,00
6	102,69	102,97	0,27	205,37	205,83	0,22	410,74	410,74	0,00
7	102,75	103,00	0,24	205,50	205,88	0,18	410,99	410,99	0,00
8	108,91	109,39	0,44	217,83	218,52	0,32	435,66	435,66	0,00
9	108,93	109,39	0,42	217,86	218,54	0,31	435,72	435,72	0,00
10	171,31	172,26	0,55	342,63	344,04	0,41	685,25	685,25	0,00
Max			0,55			0,41			0,00
Form	1/30		$\varepsilon, \%$	1/20		$\varepsilon, \%$	1/15		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	216,44	215,91	0,25	324,66	322,80	0,58	432,88	428,76	0,96
2	216,44	215,92	0,24	324,66	322,81	0,57	432,88	428,78	0,96
3	371,52	370,90	0,17	557,28	554,97	0,42	743,04	737,41	0,76
4	461,30	458,46	0,62	691,95	681,86	1,48	922,60	900,60	2,44
5	547,38	545,88	0,27	821,07	815,41	0,69	1094,76	1081,17	1,26
6	821,48	817,80	0,45	1232,22	1218,62	1,12	1642,96	1610,69	2,00
7	821,98	818,64	0,41	1232,97	1219,86	1,07	1643,96	1612,31	1,96
8	871,32	865,38	0,69	1306,98	1285,29	1,69	1742,64	1693,56	2,90
9	871,44	865,51	0,69	1307,16	1285,39	1,69	1742,88	1693,58	2,91
10	1370,50	1358,21	0,90	2055,75	2010,20	2,27	2741,00	2636,62	3,96
Max			0,90			2,27			3,96
Form	1/12		$\varepsilon, \%$	1/10		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE		ЗФ (2.53)	MCE	
1	541,10	533,58	1,41	649,32	637,20	1,90	1298,64	1225,30	5,99
2	541,10	533,65	1,40	649,32	637,31	1,88	1298,64	1225,92	5,93
3	928,80	917,25	1,26	1114,56	1094,95	1,79	2229,12	2084,67	6,93
4	1153,25	1114,49	3,48	1383,90	1322,34	4,66	2767,80	2435,04	13,67
5	1368,45	1341,51	2,01	1642,14	1596,83	2,84	3284,28	2973,61	10,45
6	2053,70	1990,22	3,19	2464,44	2358,70	4,48	4928,88	4246,01	16,08
7	2054,95	1993,34	3,09	2465,94	2362,38	4,38	4931,88	4258,69	15,81
8	2178,30	2087,84	4,33	2613,96	2467,23	5,95	5227,92	4388,38	19,13
9	2178,60	2088,14	4,33	2614,32	2467,77	5,94	5228,64	4392,22	19,04
10	3426,25	3232,35	6,00	4111,50	3796,70	8,29	8223,00	6477,74	26,94
Max			6,00			8,29			26,94

У таблиці 5.46 зазначені частоти для різних співвідношень h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/5, частоти розраховані МСЕ з таблиці 3.47 та відносна різниця розрахунків ε у відсотках. Для перших трьох частот розбіжність розрахунків за ЗФ (2.53) і МСЕ для всіх розглянутих співвідношень не перевищують 7%. Необхідно підвищити точність обчислення коефіцієнтів форм коливань і граничних умов для випадку $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. Для цього розрахуємо коефіцієнти на основі частот шестикутної пластини (FFFFFF) при $h/a=1/6$. У таблиці 5.47 наведено розраховані уточнені коефіцієнти F_i .

Таблиця 5.47

Уточнені коефіцієнти шестикутних пластин (FFFFFF) при $h/a=1/6$

i	F_i , при $h/a=1/6$	i	F_i , при $h/a=1/6$
1	0,275323	6	0,978755
2	0,275387	7	0,980240
3	0,470664	8	1,014113
4	0,555299	9	1,014506
5	0,676787	10	1,518271

Перші десять частот, розраховані ЗФ (2.53) за уточненими коефіцієнтами з таблиці 5.47 та МСЕ, наведено в таблиці 5.48 для $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. З наведених розрахунків можна побачити зменшення розбіжності між двома розрахунками.

Таблиця 5.48

Перші десять частот вільних коливань шестикутних пластин (FFFFFF)

Form	1/8		ε , %	1/6		ε , %	1/5		ε , %
	ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ		ЗФ (2.53)	МСЕ	
1	777,54	790,13	1,59	1036,72	1036,72	0,00	1244,06	1225,30	1,53
2	777,72	790,22	1,58	1036,96	1036,96	0,00	1244,35	1225,92	1,50
3	1329,20	1356,26	2,00	1772,27	1772,27	0,00	2126,72	2084,67	2,02
4	1568,22	1622,59	3,35	2090,96	2090,96	0,00	2509,15	2435,04	3,04
5	1911,31	1968,30	2,90	2548,42	2548,42	0,00	3058,10	2973,61	2,84
6	2764,10	2887,09	4,26	3685,47	3685,47	0,00	4422,56	4246,01	4,16
7	2768,30	2889,94	4,21	3691,06	3691,06	0,00	4429,27	4258,69	4,01
8	2863,96	3006,58	4,74	3818,61	3818,61	0,00	4582,33	4388,38	4,42
9	2865,07	3007,13	4,72	3820,09	3820,09	0,00	4584,11	4392,22	4,37
10	4287,75	4581,46	6,41	5717,00	5717,00	0,00	6860,40	6477,74	5,91
Max			6,41			0,00			5,91

ЗФ (2.53) з таблицями коефіцієнтів форм коливань та граничних умов можна використовувати для швидкого інженерного розрахунку перших десяти частот і форм вільних коливань шестикутних пластин (FFFFFF) у вигляді таблиці 5.49.

Таблиця 5.49

Узагальнення використання ЗФ (2.53) для шестикутних пластин (FFFFFF)

$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i$							
i	F_b $1/120 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 8,5\%$	F_b $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 6,5\%$	Form	i	F_b $1/120 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 8,5\%$	F_b $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 6,5\%$	Form
1	0,287401	0,275323		6	1,090808	0,978755	
2	0,287401	0,275387		7	1,091472	0,980240	
3	0,493325	0,470664		8	1,156988	1,014113	
4	0,612540	0,555299		9	1,157147	1,014506	
5	0,726842	0,676787		10	1,819828	1,518271	

5.5. Результати та висновки

- Розраховано коефіцієнти форми коливань і граничних умов для трикутних пластин із співвідношенням $h/a=1/60$ з граничними умовами (FFF) та (FFC), із співвідношенням $h/a=1/30$ з граничними умовами (FCC), із співвідношенням $h/a=1/20$ з граничними умовами (CCC). Зроблено уточнення коефіцієнтів для випадку співвідношень $1/15 \leq h/a \leq 1/10$ та $1/8 \leq h/a \leq 1/5$ для всіх розглянутих трикутних пластин. На основі отриманих коефіцієнтів розраховано частоти вільних коливань трикутних пластин різної товщини з різними варіантами закріплення країв та проведено порівняння з частотами розрахованим МСЕ, яке показало відхилення між розрахунками для пластин (FFF) менше 16%, для пластин (FFC) менше 18%, для пластин (FCC) менше 20%, для пластин (CCC) менше 21%.
- Розраховано коефіцієнти форми коливань і граничних умов для

чотирикутної пластини із співвідношенням $h/a=1/60$ з граничними умовами (FFFF) та (CCCC). Зроблено уточнення коефіцієнтів для випадку співвідношень $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. На основі отриманих коефіцієнтів розраховано частоти вільних коливань чотирикутних пластин різної товщини з різними варіантами закріплення країв та проведено порівняння з частотами розрахованим МСЕ, яке показало відхилення між розрахунками для пластин (FFFF) менше 14%.

3. Розраховано коефіцієнти форми коливань і граничних умов для п'ятикутної пластини із співвідношенням $h/a=1/60$ з граничними умовами (FFFFF) та (FFFFC). Зроблено уточнення коефіцієнтів для випадку співвідношень $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. На основі отриманих коефіцієнтів розраховано частоти вільних коливань п'ятикутних пластин (FFFFF) різної товщини та проведено порівняння з частотами розрахованим МСЕ, яке показало відхилення між розрахунками менше 11%.
4. Розраховано коефіцієнти форми коливань і граничних умов для шестикутної пластини із співвідношенням $h/a=1/60$ з граничними умовами (FFFFFF). Зроблено уточнення коефіцієнтів для випадку співвідношень $1/8 \leq h/a \leq 1/5$. На основі отриманих коефіцієнтів розраховано частоти вільних коливань шестикутних пластин різної товщини та проведено порівняння з частотами розрахованим МСЕ, яке показало відхилення між розрахунками менше 9%.
5. Для всіх розглянутих пластин спостерігається збільшення відхилення між розрахунками із збільшенням кількості закріплених країв та зменшення відхилення із збільшенням кількості кутів пластини. Для трикутних пластин додатково зроблено два уточнення коефіцієнтів, для всіх інших пластин — додаткове одне уточнення коефіцієнтів. Для уточнення розрахунків можливе додаткове уточнення коефіцієнтів.
6. Зроблено узагальнення використання зведеної формули (2.53) для кожної з розглянутих пластин.

Розділ 6

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ ТА ФОРМ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ БАГАТОКУТНИХ ПЛАСТИН

В даному розділі представлено дві розроблені установки: віброустановка для проведення експериментального дослідження частот і форм вільних коливань пластин резонансним методом (РМ) та стробокомплекс для проведення експериментального дослідження частот і форм вільних коливань пластин методом стробогологографічної інтерферометрії (МСГІ). Описана методика проведення кожного з експериментів.

Двома методами визначено частоти та форми вільних коливань багатокутних пластин з отвором та без з різними граничними умовами та проведено порівняння з частотами та формами вільних коливань розрахованими МСЕ. Досліджувані пластини були виготовлені з промислових алюмінієвих листів на верстаті з ЧПУ, а їхня поверхня підготовлена до проведення експериментів.

6.1. Експериментальне визначення частот та форм вільних коливань багатокутних пластин резонансним методом

6.1.1. Експериментальна установка і методика визначення частот і форм вільних коливань пластин резонансним методом

Для проведення експериментального дослідження резонансним методом частот і форм вільних коливань пластин було створено віброустановку, яка створює керовані механічні коливання та передає їх пластинці за допомогою контакту у вигляді жорсткого наскрізного болтового з'єднання штоку установки з пластиною через отвір або притискного точкового контакту з поверхнею пластини. При останньому способі контакту необхідно окремо мати затискну рамку для пластини, яка буде забезпечувати реалізацію конкретних граничних умов. При задаванні частоти коливань віброустановки

та досягання резонансу пластини можна спостерігати форми вільних коливань пластин на фіксованій частоті в реальному часі з можливістю реєстрації їх на фотокамеру. Віб्रोустановка складається з п'єзокерамічного вібратора (рис. 6.1), генератора частот (рис. 6.2), частотоміра (рис. 6.3), підсилювача частот (рис. 6.4), досліджуваної пластини з отвором в центрі для закріплення (рис. 6.5), сипучої речовини фракцією 0,5 мм та цифрової фотокамери.



Рис.6.1. П'єзокерамічний вібратор



Рис. 6.2. Генератора частот



Рис.6.3. Частотомір



Рис.6.4. Підсилювач частот



Рис. 6.5. Пластина закріплена на п'єзокерамічному вібраторі

При створенні віброустановки спеціально розроблений та виготовлений п'єзокерамічний вібратор (рис. 6.6), який представляє собою сталевий суцільний стакан (1) з укладеними всередину 14 п'єзокерамічними круглими шайбами з титанату барію (2) з контактними пластинками із мідної тонкої

фольги, з'єднаних паралельно (3), які забезпечують подачу на шайби змінної напруги. Стовпчик шайб притискається інерційним елементом (4) за допомогою різьбового з'єднання. Віброприскорення такого віброзбудження можуть досягати великих значень, які недосяжні іншими типами вібраторів, та передавати вимушені коливання іншим об'єктам за допомогою штока (5).

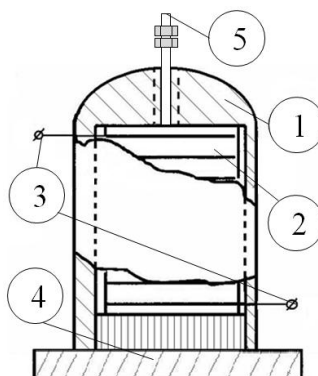


Рис. 6.6. Схематичне зображення п'єзокерамічного вібратора

Методика проведення експерименту:

1. Попереднє збирання віброустановки з елементів: п'єзокерамічного вібратора, підсилювач частот, генератор частот, частотомір.
2. Закріплення пластини безпосередньо через болтове з'єднання штока або закріплення пластини в затискаючій рамці та забезпечення контакту штока вібратора з поверхнею пластини.
3. Розміщення пластини в горизонтальній площині.
4. Перевірка контакту пластини з штоком п'єзокерамічного вібратора.
5. Рівномірне покриття поверхні пластини сипучою речовиною, якою є сферичні дрібні легкі елементи фракцією 0,5 мм.
6. Увімкнення віброустановки та покроковий (0,5 Гц) перебір частот на генераторі до моменту утворення на поверхні пластини чітких рисунків із сипучої речовини.
7. Фіксація частоти вільних коливань з перевіркою частоти на генераторі за допомогою частотоміру.
8. Фіксація форми коливань збудженої пластини у вигляді рисунків

Хладні за допомогою цифрової фотокамери.

9. Повторення пунктів 6-8 для пошуку наступної частоти і форми вільних коливань. При необхідності досипати сипучу речовину.

6.1.2. Визначення частот та форм вільних коливань трикутної пластини з отвором резонансним методом

За допомогою описаної вище методики проведення експерименту резонансним методом (РМ) отримані частоти і форми вільних коливань алюмінієвої трикутної пластини з отвором із граничними умовами ($F_e F_e F_e C_h$) [275]. Геометрія пластини обиралась відповідно до геометрії трикутної пластини дослідженої в пункті 4.1. Деякі частоти вільних коливань представлені в таблиці 6.1, де додатково наведені розраховані МСЕ частоти та відносні відхилення ε у відсотках між частотами визначеними двома методами. Максимальне відхилення між частотами отриманими двома різними способами не перевищує 6%. Нумерація форм коливань відповідає загальній нумерації форм коливань отриманих МСЕ. Амплітуди перших вільних коливань є великими, а розміри пластини відносно невеликі. Сферичним елементам важко утворити чіткі вузлові лінії перших форм коливань у зв'язку з їх швидким переміщенням за межі поверхні пластини, тобто розсіюванням, тому в роботі представлені найкращі форми вільних коливань (рис. 6.7), що відповідають більш вищим частотам.

Таблиця 6.1

Частоти вільних коливань трикутної пластини ($F_e F_e F_e C_h$)

Form	f , Гц		
	Експеримент РМ	МСЕ	ε , %
14	2564	2714	5,53
15	2582	2728	5,35
18	3092	3148	1,78
20	4033	4093	1,47
22	4095	4158	1,52
26	5247	5291	0,83
27	5363	5375	0,22
32	6742	6756	0,21
36	7192	7294	1,40
37	7874	7972	1,23

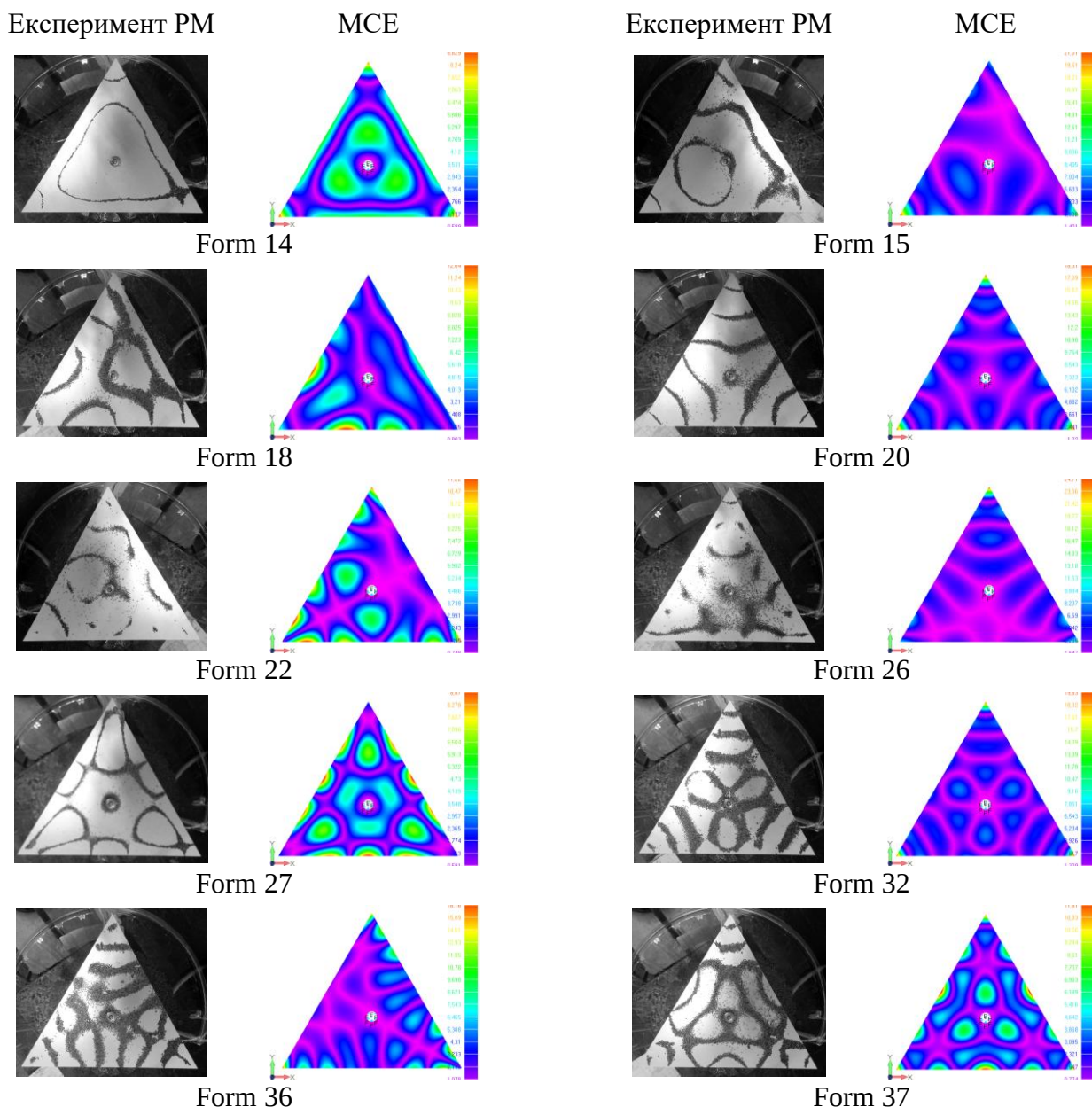


Рис. 6.7. Форми вільних коливань трикутної пластини ($F_e F_e F_e C_h$)

6.1.3. Визначення частот та форм вільних коливань прямокутних пластин з отвором та без резонансним методом

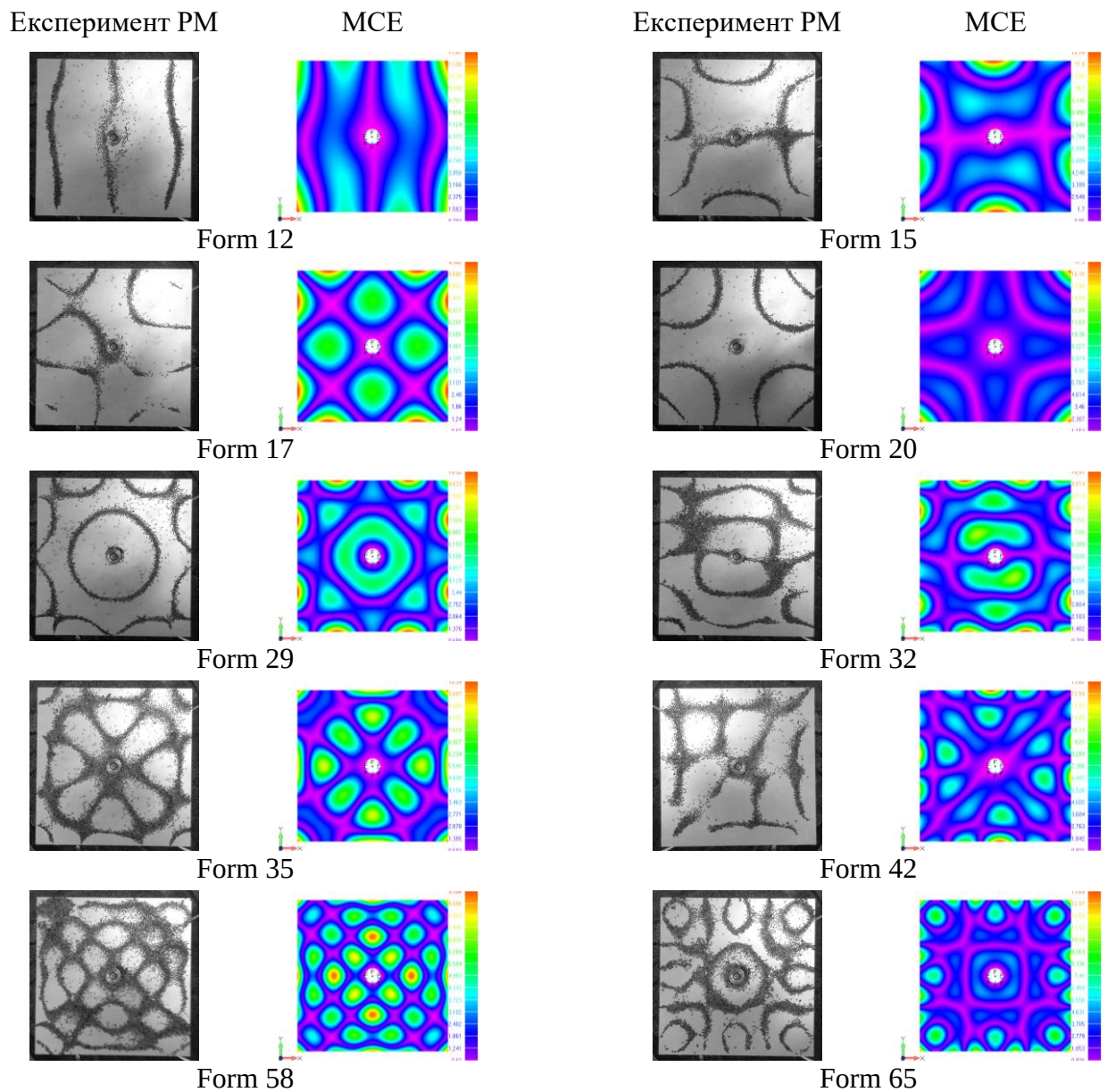
РМ отримані частоти і форми вільних коливань алюмінієвої квадратної пластини з отвором із граничними умовами ($F_e F_e F_e F_e C_h$). Геометрія пластини обиралась відповідно до геометрії квадратної пластини дослідженої в пункті 4.3. Деякі частоти вільних коливань представлені в таблиці 6.2, де додатково наведені розраховані МСЕ частоти та відносні відхилення ε у відсотках. Максимальне відхилення між частотами отриманими двома різними способами

не перевищує 5%. Форми вільних коливань представлені на рис. 6.8.

Таблиця 6.2

Частоти вільних коливань квадратної пластини ($F_c F_c F_c F_c C_h$)

Form	f , Гц		
	Експеримент РМ	МСЕ	ε , %
12	2341	2432	3,74
15	3900	4010	2,74
17	3985	4092	2,61
20	4887	5080	3,80
29	8268	8684	4,79
32	9080	9496	4,38
35	9869	9950	0,81
42	12478	12594	0,92
58	18300	18439	0,75
65	19420	19630	1,07

Рис. 6.8. Форми вільних коливань квадратної пластини ($F_c F_c F_c F_c C_h$)

РМ та МСЕ отримані частоти і форми вільних коливань алюмінієвої ($E = 71 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,34$, $\rho = 2710 \text{ кг/м}^3$) квадратної пластини [279] зі стороною $a = 140 \text{ мм}$, товщиною $d = 3 \text{ мм}$ та жорстко затиснутими краями (СССС) в спеціальній затискаючій рамці (рис. 6.9). Затискаюча рамка виготовлена із сталі та складається з двох частин, які з обох сторін рівномірно жорстко затискають пластину за рахунок болтових з'єднань. Одна із сторін рамки має регульовані ніжки для встановлення пластини горизонтально. Точковий контакт штока п'єзокерамічного вібратора з пластиною здійснюється з тильної сторони та має, у випадку необхідності, можливість переміщуватись в іншу точку поверхні пластини, якщо його положення співпадає з вузловою лінією форми коливань. Реалізація жорсткого закріплення дає можливість дослідити перші форми вільних коливань.

Перші шість частот вільних коливань з відносними відхиленнями від розрахованих МСЕ частот представлені в таблиці 6.3. Максимальне відхилення між частотами отриманими двома різними способами не перевищує 11%. Форми вільних коливань представлені на рис. 6.10.

Таблиця 6.3

Частоти вільних коливань квадратної пластини (СССС)

Form	f , Гц		
	Експеримент РМ	МСЕ	ε , %
1	1254	1372	8,60
2	2559	2789	8,25
3	2553	2789	8,46
4	3765	4096	8,08
5	4522	4972	9,05
6	5544	4997	10,95

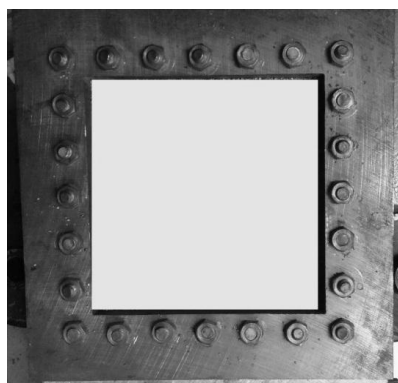


Рис. 6.9. Затискна рамка для реалізації граничних умов (СССС)

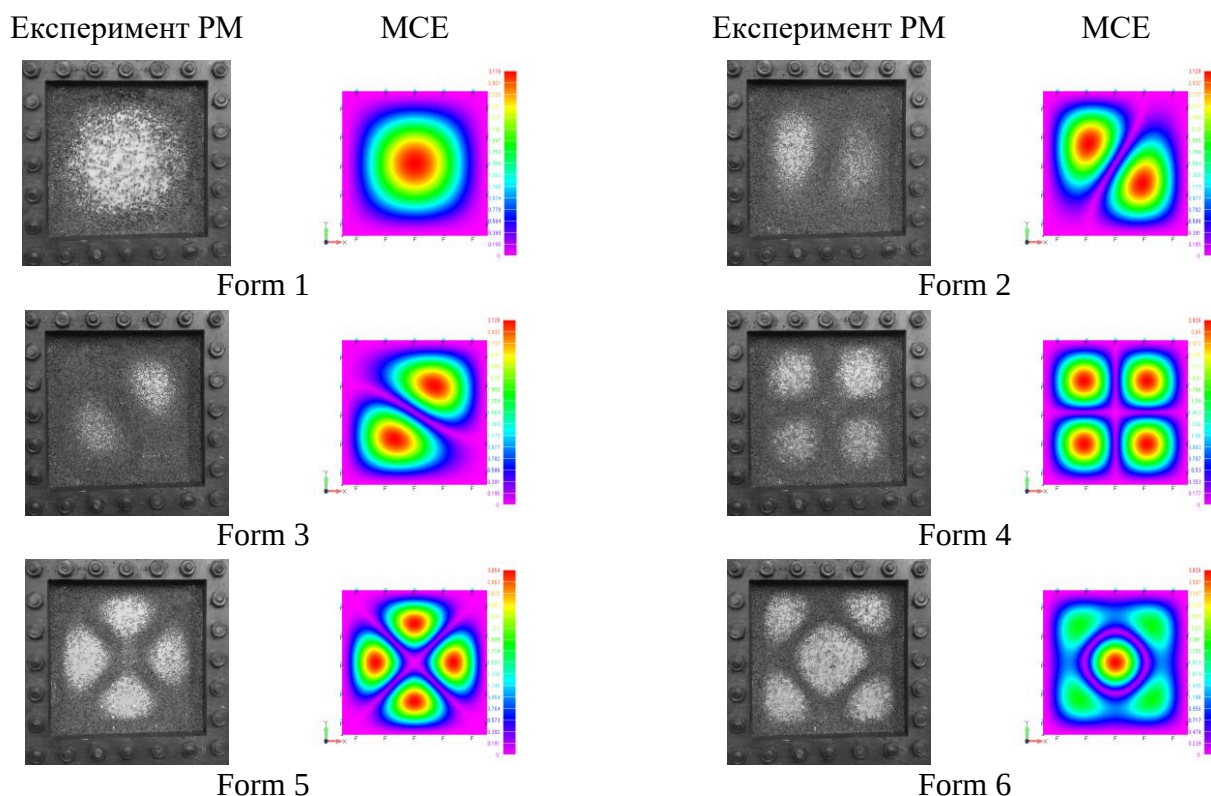


Рис. 6.10. Форми вільних коливань квадратної пластини (CCCC)

РМ та МСЕ отримані частоти і форми вільних коливань алюмінієвої ($E = 71 ГПа$, $\nu = 0,33$, $\rho = 2710 \text{ кг/м}^3$) прямокутної пластини зі стороною $a = 173 \text{ мм}$ та $b = 130 \text{ мм}$, товщиною $d = 3 \text{ мм}$, отвором радіусом $r = 7 \text{ мм}$ та граничними умовами ($F_e F_e F_e F_e C_h$). Деякі частоти вільних коливань представлені в таблиці 6.4. Максимальне відхилення між частотами отриманими двома різними способами не перевищує 10%. Форми вільних коливань представлені на рис. 6.11.

Таблиця 6.4

Частоти вільних коливань прямокутної пластини ($F_e F_e F_e F_e C_h$)

Form	f , Гц		
	Експеримент РМ	МСЕ	ε , %
9	1509	1642	8,10
12	2520	2703	6,77
17	3617	3984	9,21
20	4781	5097	6,20
21	4994	5211	4,16
24	5530	5866	5,73
31	7523	8119	7,34
32	7941	8557	7,20
36	8670	9165	5,40
41	10662	11412	6,57

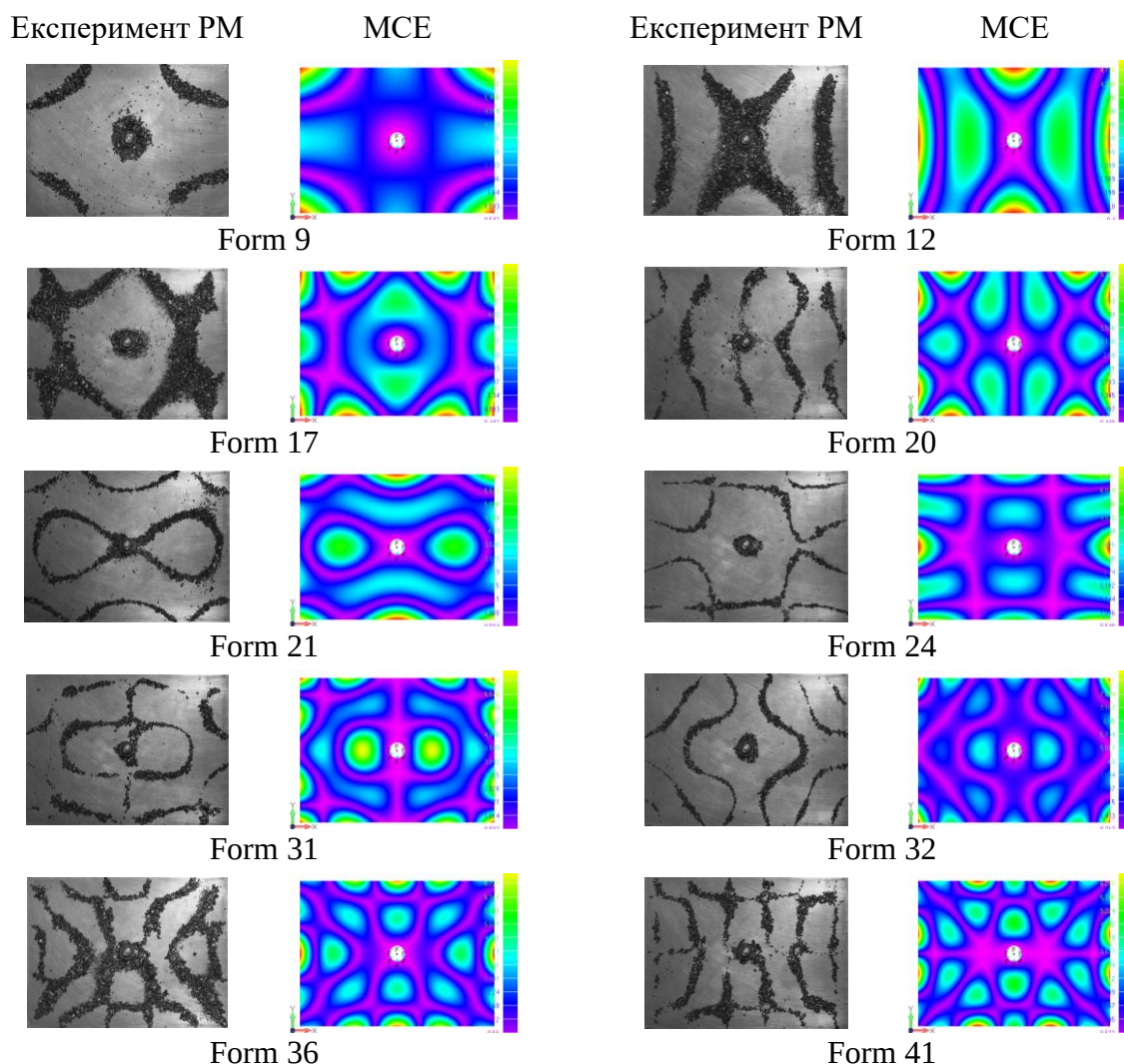


Рис. 6.11. Форми вільних коливань прямокутної пластини (FeFeFeFeCh)

6.1.4. Визначення частот та форм вільних коливань п'ятикутної пластини з отвором резонансним методом

РМ отримані частоти і форми вільних коливань алюмінієвої п'ятикутної пластини з отвором із граничними умовами ($F_e F_e F_e F_e F_e C_h$) [276, 280]. Геометрія пластини обиралась відповідно до геометрії п'ятикутної пластини дослідженої в пункті 4.4. Деякі частоти вільних коливань представлені в таблиці 6.5, де додатково наведені розраховані МСЕ частоти та відносні відхилення ε у відсотках. Максимальне відхилення між частотами отриманими двома різними способами не перевищує 7%. Форми вільних коливань представлені на рис. 6.12.

Частоти вільних коливань п'ятикутної пластини ($F_e F_e F_e F_e F_e C_h$)

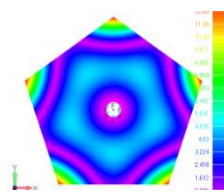
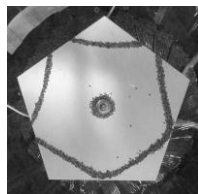
Form	f , Гц		
	Експеримент РМ	МСЕ	ε , %
11	2391	2552	6,31
12	3104	3299	5,91
17	4146	4180	0,81
18	5449	5459	0,18
19	5452	5460	0,15
26	7501	7865	4,63
31	9520	9722	2,08
32	9535	9724	1,94
37	11452	11635	1,57
43	14008	14245	1,66

Експеримент РМ

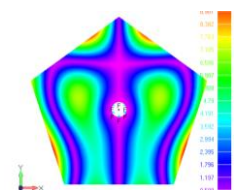
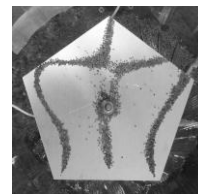
МСЕ

Експеримент РМ

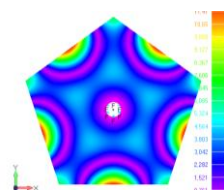
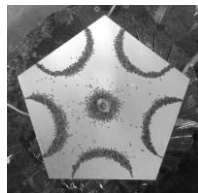
МСЕ



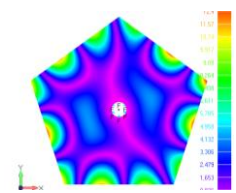
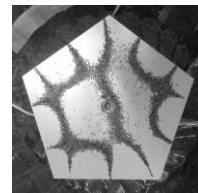
Form 11



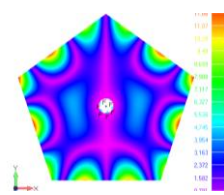
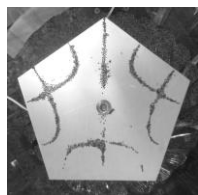
Form 12



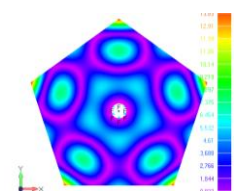
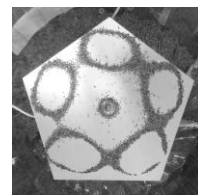
Form 17



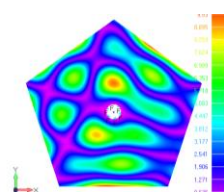
Form 18



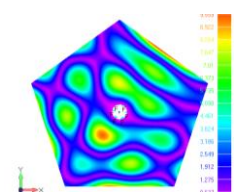
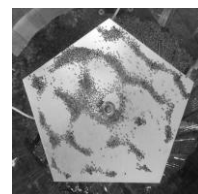
Form 19



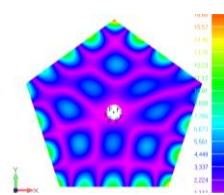
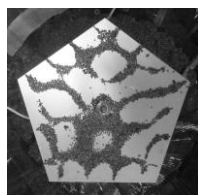
Form 26



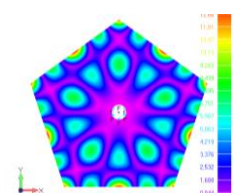
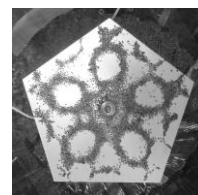
Form 31



Form 32



Form 37



Form 43

Рис. 6.12. Форми вільних коливань п'ятикутної пластини ($F_e F_e F_e F_e F_e C_h$)

6.1.5. Визначення частот та форм вільних коливань шестикутної пластини з отвором резонансним методом

РМ отримані частоти і форми вільних коливань алюмінієвої шестикутної пластини з отвором із граничними умовами ($F_e F_e F_e F_e F_e C_h$). Геометрія пластини обиралась відповідно до геометрії шестикутної пластини дослідженої в пункті 4.5. Деякі частоти вільних коливань представлені в таблиці 6.6, де додатково наведені розраховані МСЕ частоти. Максимальне відхилення між отриманими двома різними способами частотами не перевищує 9%. Форми вільних коливань представлені на рис. 6.13.

Таблиця 6.6

Частоти вільних коливань шестикутної пластини ($F_e F_e F_e F_e F_e C_h$)

Form	f , Гц		
	Експеримент РМ	МСЕ	ε , %
11	2709	2976	8,97
12	2884	3165	8,88
18	5714	5624	1,60
22	7187	7389	2,73
26	8333	9111	8,54
39	13275	13684	2,99

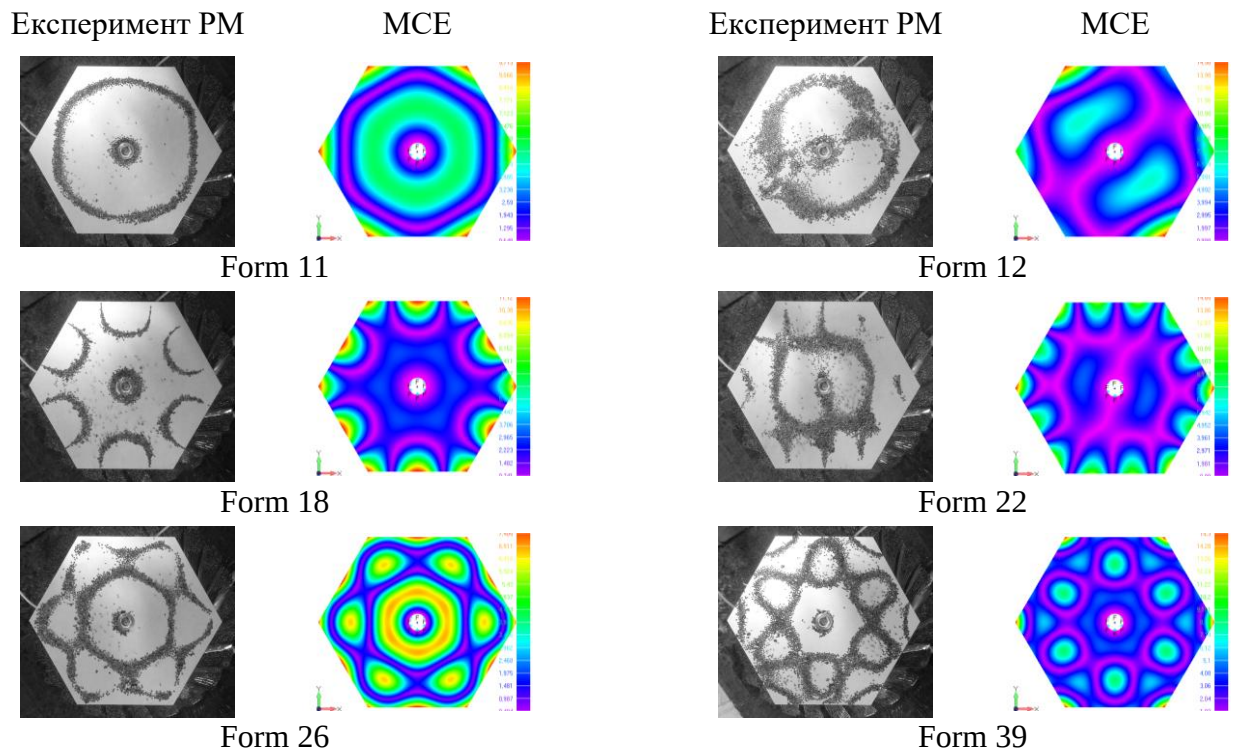


Рис. 6.13. Форми вільних коливань шестикутної пластини ($F_e F_e F_e F_e F_e C_h$)

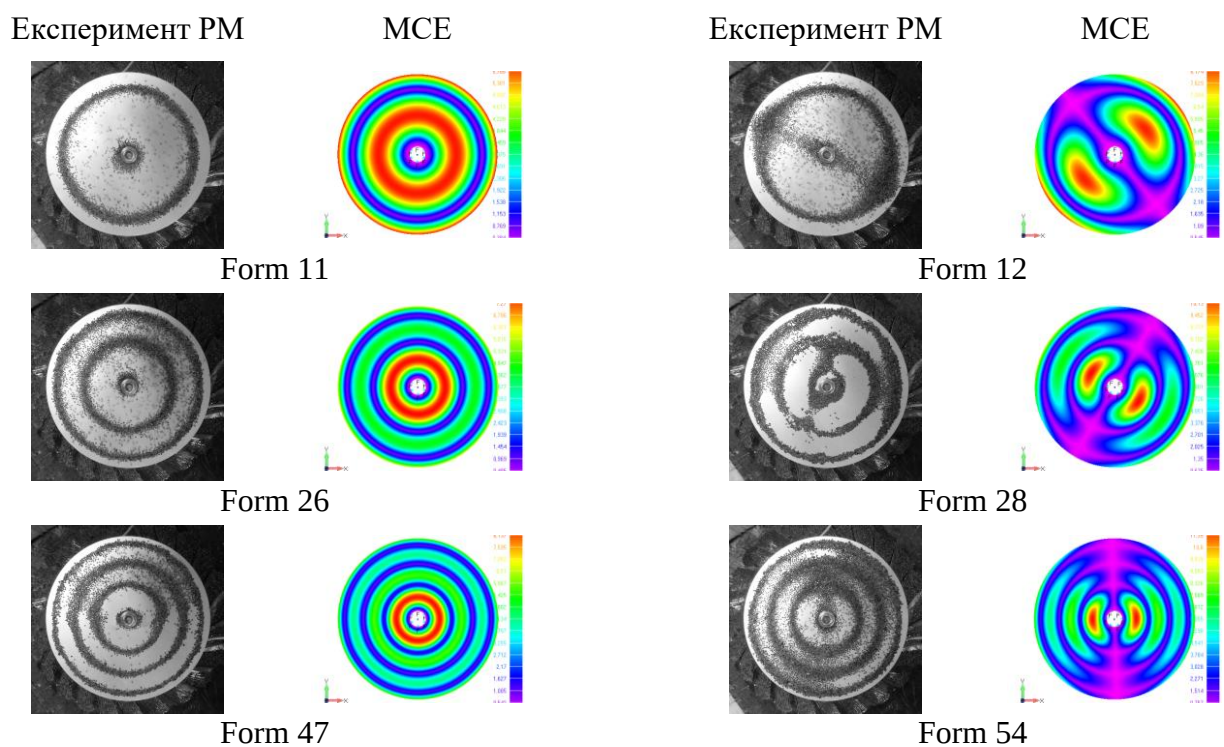
6.1.6. Визначення частот та форм вільних коливань круглої пластини з отвором резонансним методом

РМ та МСЕ отримані частоти і форми вільних коливань алюмінієвої круглої пластини радіусом $R=60$ мм товщиною $d=6$ мм з отвором радіусом $r=2$ мм та граничними умовами ($F_e C_h$). Деякі частоти вільних коливань представлені в таблиці 6.7. Максимальне відхилення між частотами отриманими двома різними способами не перевищує 12%. Форми вільних коливань представлені на рис. 6.14.

Таблиця 6.7

Частоти вільних коливань круглої пластини ($F_e C_h$)

Form	f , Гц		
	Експеримент РМ	МСЕ	ε , %
11	3109	3483	10,74
12	3356	3798	11,64
26	9202	10063	8,56
28	11119	10528	5,61
47	18540	19684	5,81
54	19029	20258	6,07

Рис. 6.14. Форми вільних коливань круглої пластини ($F_e C_h$)

6.2. Експериментальне визначення частот та форм вільних коливань багатокутних пластин методом стробогологографічної інтерферометрії

6.2.1. Експериментальна установка і методика визначення частот і форм вільних коливань пластин методом стробогологографічної інтерферометрії

Для реалізації експерименту методом стробогологографічної інтерферометрії (МСГІ) розроблений стробокомплекс, який з метою віброзахисту встановлений на масивній амортизаційній голографічній плиті. В якості джерела когерентного монохроматичного випромінювання використано гелій-неоновий лазер ЛГН-222 з потужністю 60 мВт, довжиною хвилі $\lambda = 0,63$ мкм і довжиною когерентності 20 см. Для збудження коливань пластини використовується п'єзокерамічний вібратор (рис. 6.1). Віброзбуджуючий сигнал формується за допомогою звукового генератора (рис. 6.2) і підсилюється підсилювачем низької частоти потужністю до 300 Вт (рис. 6.4). Для одержання стробоінтерферограм застосовується електрооптичний модулятор випромінювання типу МЛ-3. Контроль скважності стробуючих імпульсів здійснювався згідно даних осцилографа, на вхід якого подається сигнал з генератора прямокутних імпульсів.

Для визначення власних частот і форм вільних коливань пластин методом стробогологографічної інтерферометрії використовується оптична схема (рис. 6.15). Промінь лазера ЛГН-222 (1) проходить через затвор з електроприводом (2), який призначений для технічного переривання променя, та потрапляє в канал електрооптичного модулятора МЛ-3 (3). Після проходження модулятора та відбиття від дзеркала (4) промінь за допомогою світлоподільвача (5) ділиться на два променя, один з яких, відбившись дзеркалом (6) та пройшовши через мікрооб'єктив (7), формує опорну світлову хвилю, яка освічує фотопластину (8); інший промінь, пройшовши через пінхол (9) та відбившись від сферичного дзеркала (10), освітлює пластину (11). В результаті відбивання від поверхні пластини формується предметна світлова хвиля, яка освічує фотопластину (8). На фотопластинці фіксується голограма пластини (11). Після відтворення голограми пластини

та збудження резонансних коливань пластини (11) п'єзокерамічним вібратором (12) можна спостерігати інтерференційні картини та фіксувати їх фотокамерою (13).

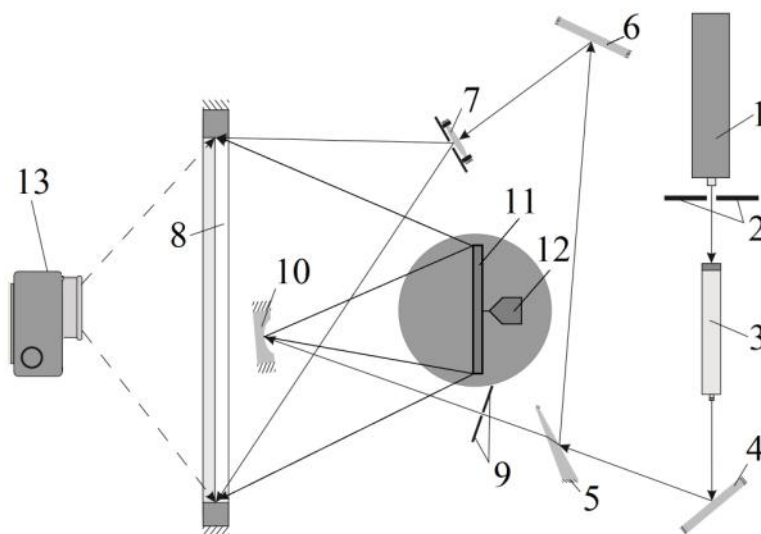


Рис. 6.15. Оптична схема установки

Методика проведення експерименту:

1. Попередня підготовка поверхні пластини, з метою забезпечення дифузного розсіювання відбитого світлового потоку від поверхні пластини, що досягається нанесенням тонкого шару білої матової фарби на поверхню пластини.

2. Встановлення пластини в спеціальному затискному пристрої з урахуванням виключення можливих переміщень.

3. Збирання оптичної схеми голографічної установки, яке включає в себе виконання обов'язкових умов:

- забезпечення рівномірного освітлення поверхні пластини, інтенсивність опорної хвилі повинна бути в 3-5 рази більшою за інтенсивність предметної хвилі;
- частота просторової структури, що реєструється на голограмі, не повинна перевищувати дозволеної здатності фотоемульсії;
- оптична різниця ходу опорної і предметної хвиль, не повинна

перевищувати довжини когерентності лазера.

4. Проведення юстування електрооптичного модулятора.
5. Проведення компонування і коригування оптичної схеми.
6. Фіксація на фотопластину голограми пластини у стані спокою.
7. Обробка фотопластини фотохімічним способом та її сушіння.
8. Точне повернення фотопластини на місце запису голограми.
9. Включення віброзбудження пластини з плавним покроковим зміненням частоти коливань, рівень віброзбудження необхідно контролювати так, щоб амплітуда нерезонансних коливань була в межах нижнього порогу чутливості інтерферометра.
10. Спостереження через «опорну голограму» процесу виникнення коливань поверхні пластини.
11. Модуляція променя прямокутними стробуючими імпульсами, скважність якого повинна бути в межах 8-10.
12. Фіксація частоти власних коливань.
13. Фіксація форми коливань на фотокамеру.
14. Повторення пунктів 9-13.

6.2.2. Визначення частот та форм вільних коливань прямокутних пластин методом стробогологографічної інтерферометрії

За допомогою методики проведення експерименту МСГІ та МСЕ отримані частоти і форми вільних коливань алюмінієвої ($E = 71 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,34$, $\rho = 2710 \text{ кг/м}^3$) квадратної пластини зі стороною $a = 140 \text{ мм}$, товщиною $d = 3 \text{ мм}$ та жорстко затиснутими двома краями та двома вільними краями (FFCC) в спеціальній затискній рамці. Затискна рамка виготовлена по аналогії до рамки (рис. 6.9). Перші вісім частот вільних коливань з відносними відхиленнями від розрахованих МСЕ частот представлені в таблиці 6.8. Максимальне відхилення між частотами отриманими двома різними способами не перевищує 7%. Форми вільних коливань представлені на рис. 6.16.

Частоти вільних коливань квадратної пластини (FFCC)

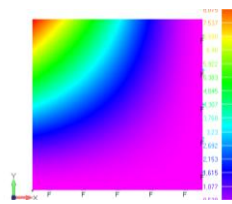
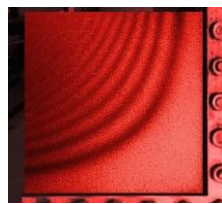
Form	f , Гц		
	Експеримент МСГІ	МСЕ	ε , %
1	245	260	5,77
3	978	1009	3,07
4	1660	1782	6,85
6	2371	2480	4,40
7	3084	3196	3,50
10	4532	4656	2,66
12	5200	5373	3,22
21	8786	9089	3,33

Експеримент МСГІ

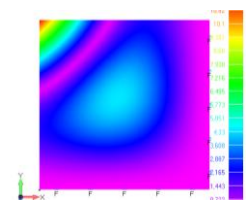
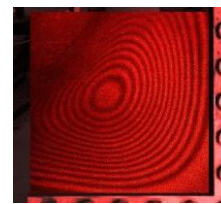
МСЕ

Експеримент МСГІ

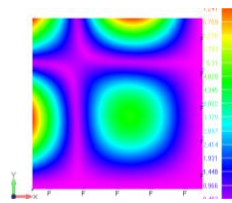
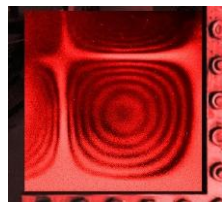
МСЕ



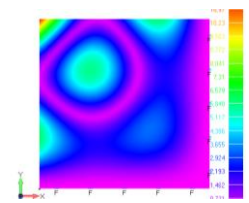
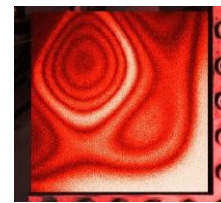
Form 1



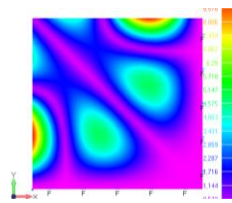
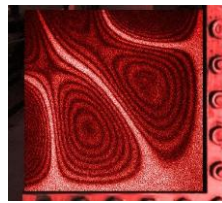
Form 3



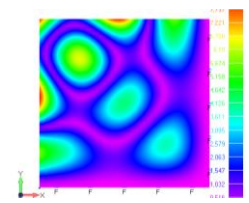
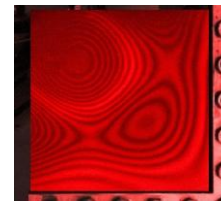
Form 4



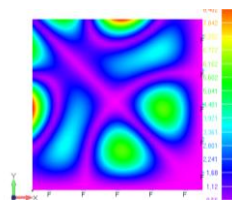
Form 6



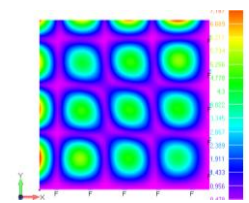
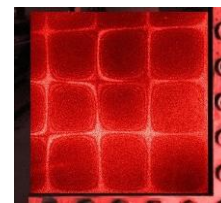
Form 7



Form 10



Form 12



Form 21

Рис. 6.16. Форми вільних коливань квадратної пластини (FFCC)

За допомогою методики проведення експерименту МСГІ та МСЕ отримані частоти і форми вільних коливань алюмінієвої ($E = 71 ГПа$, $\nu = 0,34$, $\rho = 2710 \text{ кг/м}^3$) квадратної пластини зі стороною $a = 140 \text{ мм}$, товщиною $d = 3 \text{ мм}$ та жорстко затиснутими всіма краями (CCCC) в

спеціальній затискній рамці (рис. 6.9). Перші шість частот вільних коливань з відносними відхиленням від розрахованих МСЕ представлені в таблиці 6.9. Максимальне відхилення між частотами отриманими двома різними способами не перевищує 8%. Форми вільних коливань представлені на рис. 6.17.

Таблиця 6.9

Частоти вільних коливань квадратної пластини (CCCC)

Form	f , Гц		
	Експеримент МСГІ	МСЕ	ε , %
1	1267	1372	7,65
2	2572	2789	7,78
3	2580	2789	7,49
4	3852	4096	5,96
7	5985	6174	3,06
8	6077	6174	1,57

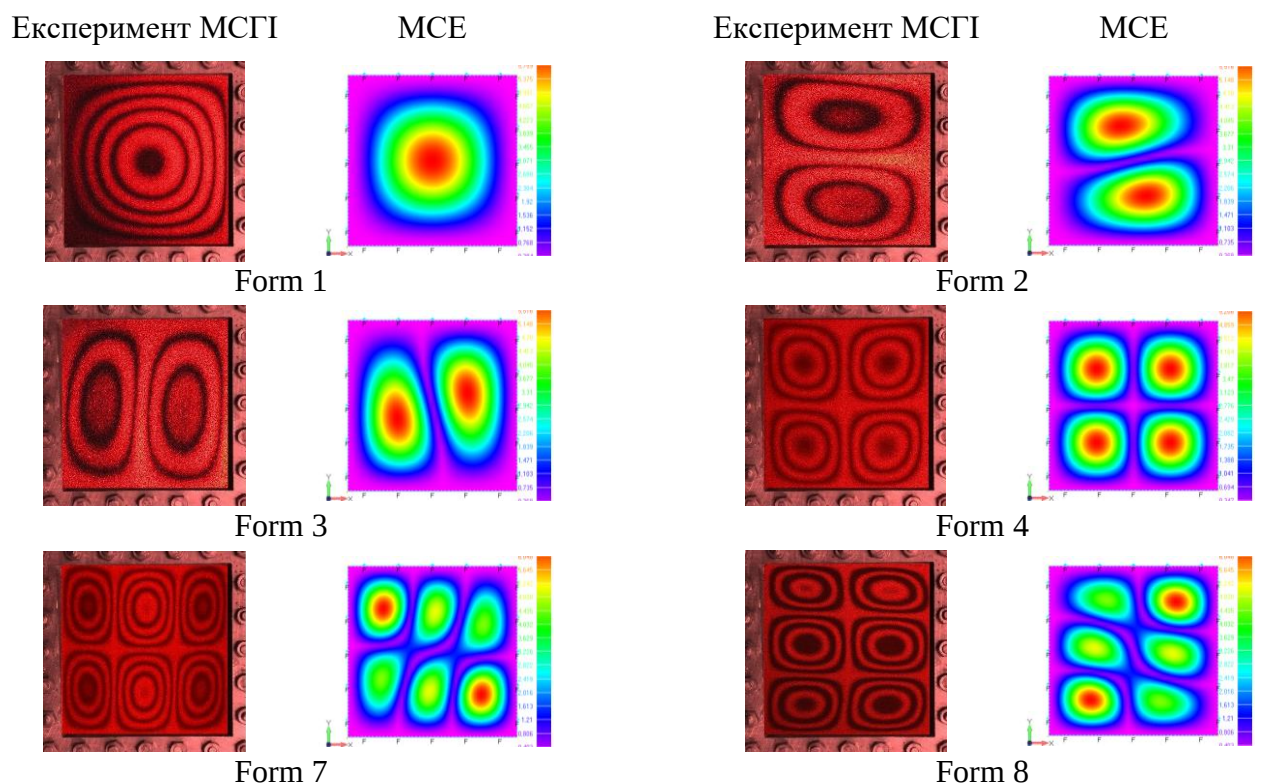


Рис. 6.17. Форми вільних коливань квадратної пластини (CCCC)

6.3. Результати та висновки

1. Представлено дві розроблені установки: віброустановка для проведення експериментального визначення частот і форм вільних коливань пластин

резонансним методом та стробокомплекс для проведення експериментального визначення частот і форм вільних коливань пластин методом стробоголографічної інтерферометрії. Описана методика проведення кожного з експериментів.

2. Резонансним методом визначено частоти та форми вільних коливань трикутної, чотирикутної, п'ятикутної, шестикутної та круглої пластини з вільними краями та жорстко закріпленим отвором, а також прямокутної пластини з жорстко закріпленими краями. Проведено порівняння експериментально отриманих результатів з результатами отриманими чисельно, в результаті якого встановлено, що відхилення між частотами не перевищує 12%, що свідчить про коректність застосування обох методів.
4. Методом стробоголографічної інтерферометрії визначено частоти та форми вільних коливань чотирикутної пластини з жорстко закріпленими всіма краями та чотирикутної пластини з двома суміжними жорстко закріпленими краями і двома вільними краями. Проведено порівняння експериментально отриманих результатів з результатами отриманими чисельно, в результаті якого встановлено, що відхилення між частотами не перевищує 8%, що свідчить про коректність застосування обох методів та відображає більшу точність метода стробоголографічної інтерферометрії в порівнянні з резонансним.
5. Обидва експериментальні методи дають можливість спостерігати формоутворення в реальному часі та фіксувати форми вільних коливань на фотокамеру.
6. Проведення чисельних розрахунків перед експериментальними дослідженнями дає детальне уявлення про частотні діапазони пошуку частот і форм вільних коливань та про порядок формоутворення, що підвищує швидкість експериментально пошуку.

Розділ 7

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

В науковій літературі більшість публікацій присвячено побудові теоретичних моделей вільних коливань замкнутих кругових циліндричних оболонок сталої товщини, незначна кількість досліджує коливання незамкнутих оболонок або оболонок змінної товщини, мало інформації наведено про форми вільних коливань оболонок різного поперечного перерізу та залежності частот від різних параметрів оболонки.

В даному розділі для проведення розрахунків МСЕ та побудови коректної скінченно-елементної моделі оболонки проведено дослідження типу та розміру скінченного елемента з урахуванням оптимального комп'ютерного часу розрахунку та збіжності отриманих результатів. Проведено оцінку достовірності отриманих результатів розрахунку МСЕ в програмному середовищі FEMAP за допомогою розв'язування трьох тестових задач та порівняння отриманих результатів з результатами, отриманими методом голографічної інтерферометрії та методом сплайн-колокації.

Проведено розрахунок частот і форм вільних коливань замкнутих та незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного та гофрованого поперечного перерізу, встановлено залежності частоти вільних коливань від граничних умов накладених на торці оболонки, фізико-механічних характеристик матеріалу та характеру розкриття оболонки. Детально досліджено гофровані оболонки з різною кількістю гофрів та різними варіантами жорсткого закріплення. Розраховано частоти вільних коливань оболонок різної товщини в межах співвідношень товщини оболонки до серединного радіуса поперечного перерізу d/R_C від $1/20$ до $1/4$. Визначено експериментально частоти і форми вільних коливань товстостінної оболонки, які підтверджують чисельні розрахунки.

7.1. Вибір типу та розміру скінченного елемента для розрахунку циліндричних оболонок

Для проведення розрахунків частот та форм вільних коливань циліндричних оболонок різної конструктивної неоднорідності методом скінченних елементів необхідно коректно побудувати розрахункову скінченно-елементну модель, правильно обрати вид скінченного елемента та його розмір з урахуванням оптимального комп'ютерного часу розрахунку та точності отриманих результатів.

Дослідження вибору типу і розміру скінченного елемента (plate, brick, tetra (рис. 3.7)) будемо проводити на скінченно-елементних моделях (рис. 7.1) тонкої та товстої циліндричних замкнутих оболонок з жорстко закріпленими торцями (СС) та параметрами: довжина оболонок $L=0,12\text{м}$, радіус серединної поверхні $R_c=0,04\text{м}$, товщини $h=0,002\text{м}$ і $h=0,01\text{м}$, (співвідношення товщини оболонки до радіуса серединної поверхні $1/20$ і $1/4$ відповідно), модуль Юнга $E=212\text{ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,3$, густина $\rho=7800\text{кг/м}^3$. Розмір кожного елемента будемо зменшувати в два рази, доки відносна різниця розрахунків в порівнянні з попередніми розрахунками не буде складати $\varepsilon \leq 1\%$. Розрахунки будемо проводити паралельно для всіх розглянутих типів елементів, доки хоча б для одного з типів елементів не виконається умова $\varepsilon \leq 1\%$.

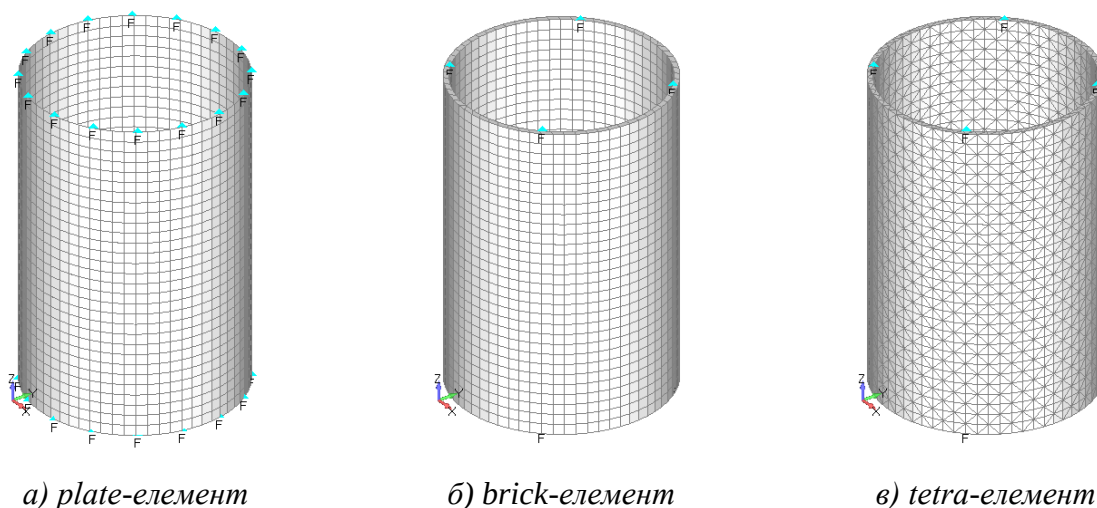


Рис. 7.1. Скінченно-елементні моделі оболонки

Розраховані частоти при розбивках елементами різних типів та розмірів

для кругової циліндричної оболонки (CC) з відношенням $h/R_c=1/20$ наведені в таблиці 7.1, відносні різниці розрахунків частот ε у відсотках наведені в таблиці 7.2, на рис. 7.2 зображена збіжність першої і десятої частот, розрахованих при різних типах елементів. Оболонка розбита різними скінченними елементами різними розмірами: $4h$, $2h$, h ; в таблиці зазначена кількість елементів (Elements), кількість вузлових точок (Nodes) та відносний час (Time) комп'ютерного розрахунку.

Таблиця 7.1

Частоти кругової циліндричної оболонки (CC) з відношенням $h/R_c=1/20$

Form	f , Гц								
	Plate			Brick			Tetra		
	$4h$	$2h$	h	$4h$	$2h$	h	$4h$	$2h$	h
1	4446,70	4444,71	4444,86	5616,23	4725,81	4488,15	4644,44	4463,42	4448,91
2	4446,70	4444,75	4444,97	5707,78	4748,88	4576,17	4663,23	4463,75	4450,21
3	5439,73	5455,87	5461,72	5818,08	5588,14	5558,98	5612,40	5499,24	5469,23
4	5439,77	5455,92	5461,74	6804,33	5592,09	5559,10	5613,94	5499,74	5469,61
5	5560,37	5551,92	5549,72	8941,08	6216,31	5703,88	6007,75	5561,31	5553,97
6	5560,47	5551,93	5549,75	8991,98	6273,24	5707,09	6058,90	5561,79	5554,16
7	7832,98	7866,42	7877,68	9006,47	8420,06	8189,05	8615,06	7946,27	7887,83
8	7832,98	7866,43	7877,68	9098,90	8431,48	8190,72	8631,65	7947,30	7888,04
9	7887,11	7976,77	8007,79	9641,65	8606,63	8265,35	8964,81	8078,56	8022,01
10	7887,23	7976,99	8007,84	10441,59	8627,58	8281,84	8980,70	8079,82	8022,82
Time	1	1	5	1	1	10	1	15	326
Elements	480	1860	7560	630	1920	7680	2790	11340	62424
Nodes	512	1922	7686	992	3906	15250	5766	23058	113982

Таблиця 7.2

Відносні різниці розрахунків частот циліндричної оболонки (CC) $h/R_c=1/20$

Form	ε , %					
	Plate		Brick		Tetra	
	$\left 1 - \frac{f_{2h}}{f_{4h}}\right \cdot 100\%$	$\left 1 - \frac{f_h}{f_{2h}}\right \cdot 100\%$	$\left 1 - \frac{f_{2h}}{f_{4h}}\right \cdot 100\%$	$\left 1 - \frac{f_h}{f_{2h}}\right \cdot 100\%$	$\left 1 - \frac{f_{2h}}{f_{4h}}\right \cdot 100\%$	$\left 1 - \frac{f_h}{f_{2h}}\right \cdot 100\%$
1	0,04	0,00	15,85	5,03	3,90	0,33
2	0,04	0,00	16,80	3,64	4,28	0,30
3	0,30	0,11	3,95	0,52	2,02	0,55
4	0,30	0,11	17,82	0,59	2,03	0,55
5	0,15	0,04	30,47	8,24	7,43	0,13
6	0,15	0,04	30,24	9,02	8,20	0,14
7	0,43	0,14	6,51	2,74	7,76	0,74
8	0,43	0,14	7,34	2,86	7,93	0,75
9	1,14	0,39	10,73	3,97	9,89	0,70
10	1,14	0,39	17,37	4,01	10,03	0,71
max	1,14	0,39	30,47	9,02	10,03	0,75

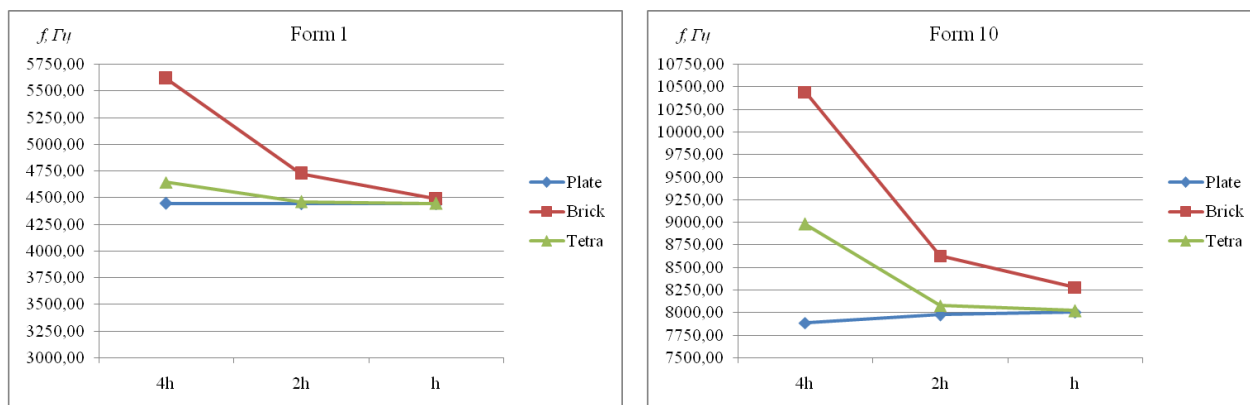


Рис. 7.2. Збіжність першої і десятої частот при різних типах елементів для оболонки $h/R_c=1/20$

Аналізуючи дані таблиці 7.1-7.2 та рисунка 7.2 можна побачити збіжність розрахунків частот вільних коливань для тонкої циліндричної оболонки при розбивці різними елементами. При розбивці різними елементами розміром $4h$ маємо вищі частоти в порівнянні з частотами, отриманими при розбивці такими ж елементами розміром $2h$; при розбивці plate-елементами маємо найменші розбіжності ε , тобто найшвидшу збіжність результатів; при різних розбивках елементами розміром h спостерігається збіжність розрахованих частот, при цьому найкращий результат відносного комп'ютерного часу маємо при розбивці plate-елементами, при розбивці brick-елементами цей час більший вдвічі, при розбивці tetra-елементами – в 65 разів. Виконання умови $\varepsilon \leq 1\%$ спостерігається при розбивці plate-елементами та tetra-елементами розміром h .

Розраховані частоти при розбивках елементами різних типів та розмірів для кругової циліндричної оболонки (СС) з відношенням $h/R_c=1/4$ наведені в таблиці 7.3, відносні різниці розрахунків частот наведені в таблиці 7.4, на рисунках 7.3 зображена збіжність першої і десятої частот, розрахованих при різних типах елементів. Оболонка розбита різними скінченними елементами різними розмі: h , $h/2$, $h/3$.

Аналізуючи дані таблиці 7.3-7.4 та рисунка 7.3 можна побачити збіжність розрахунків частот вільних коливань для товстої циліндричної оболонки при розбивці різними елементами. При розбивці plate-елементами

розміром h маємо меншу першу частоту в порівнянні з першою частотою при розбивці такими ж елементами розміром $h/2$, при розбивці brick-елементами та tetra-елементами маємо вищу першу частоту; відносний час комп'ютерного розрахунку залишається незмінний для всіх випадків; хороша збіжність результатів спостерігається при розбивці brick-елементами та tetra-елементами розміром $h/3$, при цьому розрахунки при розбивці tetra-елементами займають в 47 разів більше часу за рахунок великої кількості елементів, розраховані частоти при розбивці plate-елементами розміром $h/3$ суттєво відрізняються, що свідчить про некоректність розбиття plate-елементами товстостінних оболонок. Виконання умови $\varepsilon \leq 1\%$ спостерігається при розбивці tetra-елементами і plate-елементами розміром $h/3$, при цьому збіжність результатів при plate-елементами розміром $h/3$ не є правдивою, оскільки перша частота відрізняється від першої частоти, отриманої при розбивці brick-елементами та tetra-елементами розміром $h/3$, на 0,93% та 0,70% відповідно. Вказані відхилення будуть збільшуватись при розрахунках більш товстих оболонок. Використання розбивки plate-елементами оболонок зі змінною товщиною ускладнює процес моделювання, оскільки є необхідним задавати індивідуально товщину та закон зміни товщини кожному елементу.

Таблиця 7.3

Частоти кругової циліндричної оболонки (CC) з відношенням $h/R_c = 1/4$

Form	$f, \text{Гц}$								
	Plate			Brick			Tetra		
	h	$h/2$	$h/3$	h	$h/2$	$h/3$	h	$h/2$	$h/3$
1	8252,01	8286,54	8293,14	8535,25	8397,93	8370,82	8465,00	8367,63	8351,45
2	8252,05	8286,57	8293,24	8540,29	8407,23	8371,20	8467,86	8369,43	8351,51
3	9481,25	9499,02	9502,07	9561,60	9561,23	9553,34	9576,86	9553,23	9547,57
4	9481,27	9499,04	9502,07	9571,71	9561,23	9553,37	9580,69	9553,61	9547,75
5	13006,06	13122,08	13145,63	13319,96	13370,86	13283,98	13453,60	13282,28	13243,40
6	13006,07	13122,10	13145,63	13494,33	13370,86	13300,52	13544,38	13283,61	13243,61
7	13420,56	13515,65	13534,96	14101,98	13429,03	13452,24	13566,48	13466,21	13469,23
8	15438,14	15626,29	15663,00	15662,27	15702,66	15690,59	15905,26	15702,11	15673,63
9	15438,22	15626,37	15663,22	15672,88	15739,71	15694,96	15912,81	15705,20	15673,79
10	17758,84	17895,29	17919,62	17658,74	17857,33	17863,84	17982,96	17885,94	17871,98
Time	1	1	1	1	1	11	1	35	472
Elements	312	1200	2736	456	2880	9072	2630	16644	56318
Nodes	338	1250	2812	806	4200	11988	4856	27440	86782

Відносні різниці розрахунків частот циліндричної оболонки (CC) $h/R_c=1/4$

Form	$\varepsilon, \%$					
	Plate		Brick		Tetra	
	$\left 1 - \frac{f_{h/2}}{f_h}\right \cdot 100\%$	$\left 1 - \frac{f_{h/3}}{f_{h/2}}\right \cdot 100\%$	$\left 1 - \frac{f_{h/2}}{f_h}\right \cdot 100\%$	$\left 1 - \frac{f_{h/3}}{f_{h/2}}\right \cdot 100\%$	$\left 1 - \frac{f_{h/2}}{f_h}\right \cdot 100\%$	$\left 1 - \frac{f_{h/3}}{f_{h/2}}\right \cdot 100\%$
1	0,42	0,08	1,61	0,32	1,15	0,19
2	0,42	0,08	1,56	0,43	1,16	0,21
3	0,19	0,03	0,00	0,08	0,25	0,06
4	0,19	0,03	0,11	0,08	0,28	0,06
5	0,89	0,18	0,38	0,65	1,27	0,29
6	0,89	0,18	0,91	0,53	1,93	0,30
7	0,71	0,14	4,77	0,17	0,74	0,02
8	1,22	0,23	0,26	0,08	1,28	0,18
9	1,22	0,24	0,43	0,28	1,30	0,20
10	0,77	0,14	1,12	0,04	0,54	0,08
max	1,22	0,24	4,77	0,65	1,93	0,30

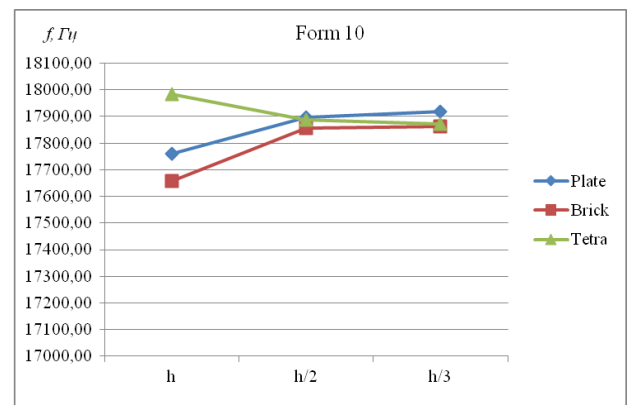
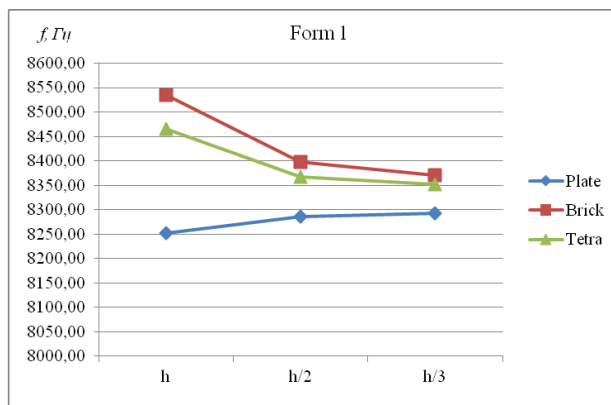


Рис. 7.3. Збіжність першої і десятої частот при різних типах елементів для оболонки

$$h/R_c=1/4$$

В подальшому будемо використовувати розбивки циліндричних оболонок різних товщин та змінної товщини brick- або tetra-елементами, розмір елемента для кожної товщини оболонки будемо обирати індивідуально.

7.2. Оцінка достовірності отриманих результатів розрахунку

Достовірність результатів та розв'язування задач динаміки оболонок МСЕ в програмному середовищі FEMAP забезпечується відповідно до етапів та форм контролю отриманих результатів, які описані в пункті 3.1 для пластин.

При проведенні розрахунків використовуються різні варіанти граничних умов на торцях оболонки:

- жорстко закріплений торець (C): $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$;
- вільний торець (F): $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0, \varphi_x \neq 0, \varphi_y \neq 0, \varphi_z \neq 0$;
- шарнірно обпертий торець (S): $u = v = 0$;

де $u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ – відповідно компоненти переміщень та кутів повороту для точок на торцях оболонки.

Достовірність результатів, отриманих за допомогою запропонованої методики перевіряється на трьох тестових задачах.

В якості першої тестової задачі проведені розрахунки МСЕ частот і форм вільних коливань сталеві тонкої замкнутої кругової циліндричної оболонки з жорстко закріпленим одним торцем, інший торець вільний, (FC) [281] з параметрами: довжина оболонки $L=0,0747\text{м}$, радіус серединної поверхні $R_c=0,04475\text{м}$, товщина стінки $h=0,0005\text{м}$, модуль Юнга $E = 220\text{ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,28$, густина $\rho = 7740\text{кг/м}^3$. В таблиці 7.5 представлено 8 частот вільних коливань власне отриманих розрахунками МСЕ та здобутих методом стробоголографічної інтерферометрії (МСГІ) іншим автором, де m – кількість півхвиль вздовж твірної, n – кількість півхвиль вздовж контура поперечного перерізу, а також наведена розбіжність у відсотках в порівнянні з експериментальними результатами ε . На рис. 7.4 представлено для порівняння вісім форм вільних коливань власне отриманих МСЕ та здобутих іншим автором МСГІ.

Таблиця 7.5

Частоти вільних коливань циліндричної оболонки (FC)

Form		$f, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$
m	n	МСГІ [281]	МСЕ	
1	4	3350	3591	7,19
1	6	2031	2172	6,94
1	8	1677	1730	3,16
1	10	2007	2012	0,25
1	12	2722	2748	0,96
1	14	3660	3684	0,66
1	16	4765	4795	0,63
1	18	6034	6066	0,53

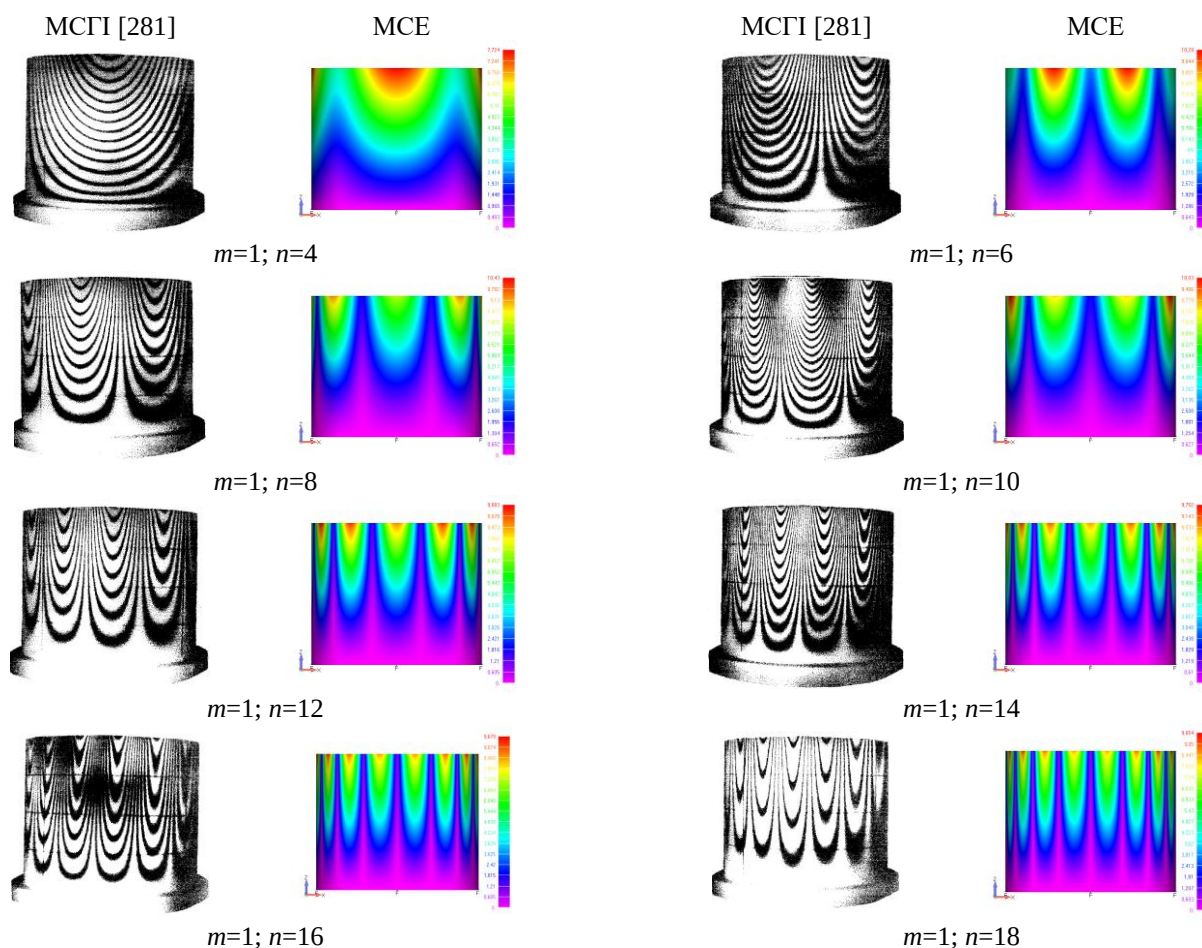


Рис. 7.4. Порівняння форм вільних коливань циліндричних оболонок (FC)

В якості другої тестової задачі проведені розрахунки MSE частот і форм вільних коливань сталеві замкнутої кругової циліндричної оболонки з жорстко закріпленими двома торцями (CC) [232] з параметрами: довжина оболонки $L=0,12\text{м}$, радіус серединної поверхні $R_c=0,03988\text{м}$, товщина стінки $h=0,00024\text{м}$, модуль Юнга $E=200\text{ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,3$, густина $\rho=7800\text{кг/м}^3$. В таблиці 7.6. представлено 8 частот вільних коливань отриманих розрахунками MSE та здобутих методом голографічної інтерферометрії (МГІ) іншим автором. На рис. 7.5 представлено для порівняння дві форми вільних коливань власне отриманих MSE та здобутих іншим автором.

Частоти вільних коливань циліндричної оболонки (СС)

Form		f , Гц		ε , %
m	n	МГІ [232]	МСЕ	
1	10	1597	1828	14,5
1	12	1680	1760	4,8
1	14	2064	1999	3,1
2	12	2745	3166	15,3
4	16	5040	5581	10,7
5	20	6112	6594	7,9
5	26	8188	7806	4,7
8	28	11848	11185	5,6

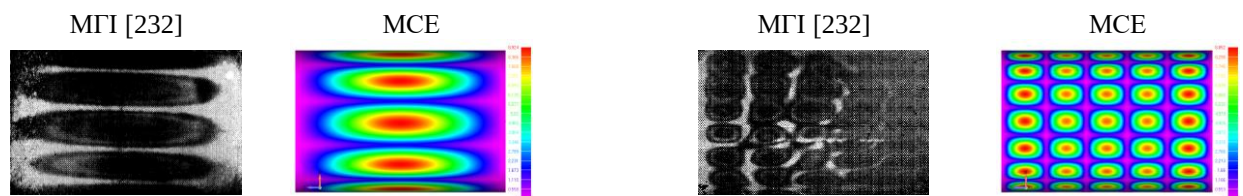


Рис. 7.5. Порівняння форм вільних коливань циліндричних оболонок (СС)

Частоти і форми вільних коливань отримані запропонованою реалізацією МСЕ показують хорошу збіжність з результатами отриманими експериментально іншими авторами для обох тестових задач, що свідчить про доцільність використання запропонованого методу до розрахунків частот і форм вільних коливань циліндричних оболонок з різними граничними умовами.

В якості третьої тестової задачі проведені розрахунки МСЕ частот і форм вільних коливань відкритих некругових циліндричних оболонок еліптичного гофрованого поперечного перерізу з різною кількістю гофрів k з параметрами: довжина оболонки $L=0,12\text{м}$, товщина $h=0,002\text{м}$, кількість гофрів $k=4$, $k=6$, $k=8$ та $k=10$, серединна поверхня задана параметричними рівняннями:

$$x(\theta) = [a + r \cos(k\theta)] \cos \theta; \quad y(\theta) = [b + r \cos(k\theta)] \sin \theta, \quad (7.1)$$

де $a = b = 0,044\text{ м}$ – напіввісі базового еліпса поперечного перерізу,

$r = 0,002 \text{ м}$ – амплітуда гофри, k – густина гофрування. Матеріалом оболонки задавалась сталь з модулем Юнга $E = 210 \text{ ГПа}$, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,28$, густиною $\rho = 7740 \text{ кг/м}^3$. Для збереження еквівалентності мас досліджуваних оболонок густина матеріалу корегувалась обернено пропорційно до зміни довжини контуру поперечного перерізу. Оболонки жорстко закріплювались по всіх контурам (CCCC).

В результаті розв'язування тестової задачі отримано частоти вільних коливань, які представлені в таблиці 7.7 разом із частотами, отриманими іншим автором методом сплайн-колокації у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації [104], а також з наведеною розбіжністю розрахунків у відсотках. В [104] не наведені форми коливань, тому формі коливань наданий порядковий номер відповідної власної частоти.

Таблиця 7.7

Частоти вільних коливань гофрованих оболонок

Form	$k=4, f, \Gamma y$		$\varepsilon, \%$	Form	$k=6, f, \Gamma y$		$\varepsilon, \%$
	Сплайн-кол. [104]	MCE			Сплайн-кол. [104]	MCE	
1	4695	4668	0,58	1	3369	3269	3,06
2	4904	4880	0,49	2	4841	4681	3,42
3	6617	6581	0,55	3	4987	4827	3,31
4	6953	6897	0,81	4	6183	5962	3,71
5	7444	7391	0,72	5	6234	6011	3,71
Form	$k=8, f, \Gamma y$		$\varepsilon, \%$	Form	$k=10, f, \Gamma y$		$\varepsilon, \%$
	Сплайн-кол. [104]	MCE			Сплайн-кол. [104]	MCE	
1	4792	4753	0,82	1	5054	4879	3,59
2	5055	5006	0,98	2	5339	5138	3,91
3	6388	6294	1,49	3	6912	6643	4,05
4	6507	6433	1,15	4	7140	6778	5,34
5	7151	7001	2,14	5	8026	7676	4,56

Аналізуючи отримані результати третьої тестової задачі, можна побачити добру відповідність між частотами вільних коливань отриманими, за допомогою FEMAP, та частотами, розрахованими методом сплайн-колокації у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації, що свідчить про коректність використання розглянутих запропонованих методів, при цьому розбіжність між результатами збільшується із збільшення кількості гофр.

Можливість отримання форм коливань MCE дає можливість

класифікувати експериментально отримані форми коливань та додатково представити форми коливань, що відповідають частотам вільних коливань, отриманих іншими методами розрахунку, якщо ці методи не дають можливість здобувати форми вільних коливань. Отримані форми коливань МСЕ для третьої тестової задачі представлені на рис. 7.6.

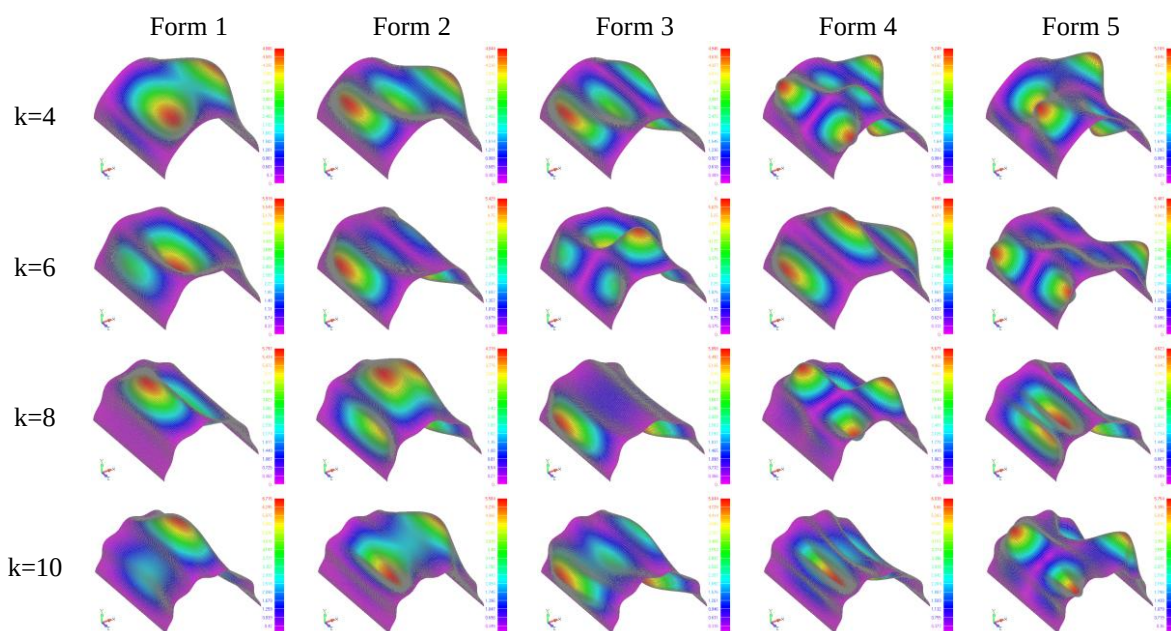


Рис. 7.6. Форми вільних коливань тестових гофрованих оболонок

7.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу

7.3.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань замкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу при різних граничних умовах на обох торцях

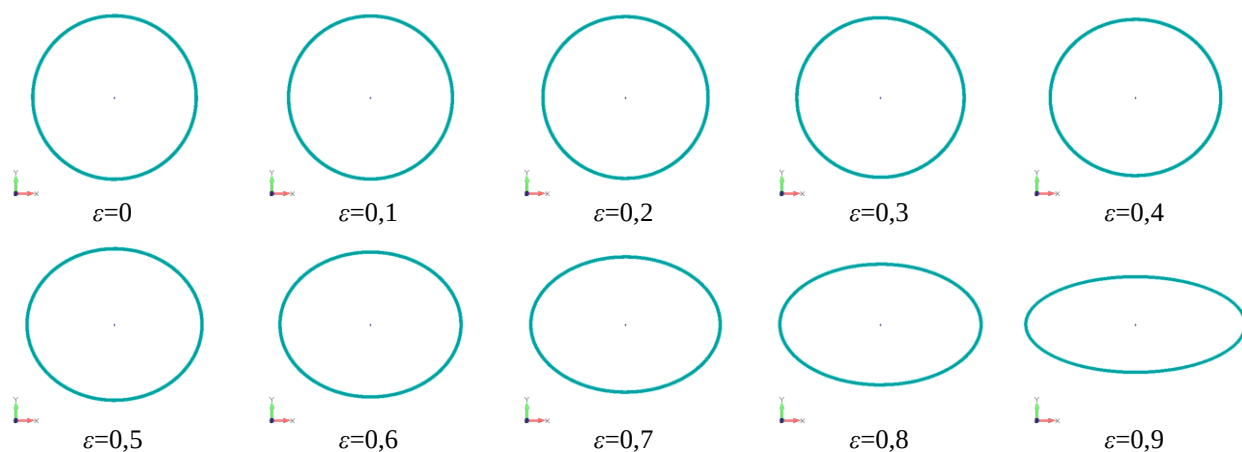
За допомогою FEMAP побудовано геометрію циліндричних оболонок еліптичного перерізу еквівалентної маси з параметрами: висота оболонок $h = 120 \text{ мм}$, товщина стінки оболонок $h = 0,002 \text{ м}$, значення ексцентриситету ε , велика піввісь серединної поверхні a_c та мала піввісь серединної поверхні b_c вказані в таблиці 7.8, модуль Юнга $E = 214 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,32$, густина $\rho = 7820 \text{ кг/м}^3$. Оболонки досліджувались при жорстко закріплених обох торцях (CC) [282, 283]. Перерізи при різних значеннях

ексцентриситету ε представлені на рис. 7.7. Скінченно-елементна розбивка проводилась brick-елементами розміром сторони $h/2$.

Таблиця 7.8

Значення великої і малої півосі серединної поверхні оболонок

	ε									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$a_c, \text{мм}$	43,547	43,657	43,992	44,574	45,444	46,674	48,386	50,810	54,434	60,656
$b_c, \text{мм}$	43,547	43,438	43,103	42,512	41,651	40,421	38,709	36,285	32,661	26,439

Рис. 7.7. Перерізи оболонок при різних значеннях ексцентриситету ε

В результаті розрахунків отримано частоти вільних поперечних коливань циліндричних оболонок (СС) з різним значенням ексцентриситету ε , які представлені в таблиці 7.9 та на гістограмах (рис. 7.8).

Таблиця 7.9

Частоти вільних поперечних коливань циліндричних оболонок з різним ε

Form		$f, \text{Гц}$									
m	n	$\varepsilon=0$	$\varepsilon=0,1$	$\varepsilon=0,2$	$\varepsilon=0,3$	$\varepsilon=0,4$	$\varepsilon=0,5$	$\varepsilon=0,6$	$\varepsilon=0,7$	$\varepsilon=0,8$	$\varepsilon=0,9$
1	4	5589	5589	5589	5589	5586	5577	5546	5451	5185	4562
1	6	4338	4338	4338	4332	4316	4277	4194	4026	3695	3053
1	8	4947	4947	4944	4935	4906	4839	4707	4466	4040	3274
1	10	6897	6896	6895	6891	6883	6863	6822,46	6720	6386	6162
1	12	9611	9611	9610	9607	9600	9581	9535	9428	9156	8632
2	4	10610	10610	10606	10587	10529	10391	10098	9545	8584	6974
2	6	8166	8165	8157	8128	8051	7895	7623	7176	6444	5493
2	8	7646	7646	7643	7631	7596	7512	7337	7001	6377	5222
2	10	8805	8805	8809	8823	8858	8908	8945	8875	8454	8040
2	12	11105	11105	11104	11102	11098	11091	11076	11023	10794	10166

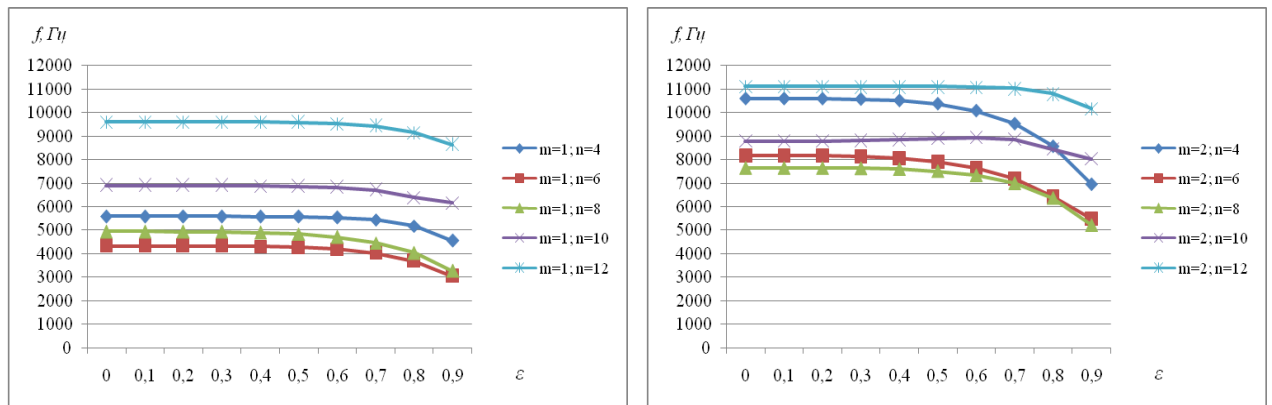


Рис. 7.8. Частоти вільних поперечних коливань циліндричних оболонок (СС) з різним ε

Порядок появи форм вільних поперечних коливань для оболонок з різними значеннями ексцентриситету зберігається майже при всіх значеннях ε , порядок порушуються тільки для оболонки із значенням $\varepsilon=0,9$, наприклад, Form (2; 4) і Form (2; 10) міняються місцями. Для наочності наведемо відповідні форми коливань для оболонки (СС) із значенням $\varepsilon=0,7$ (рис. 7.9) в двох різних положеннях, де переміщення поверхні збільшені в п'ять разів.

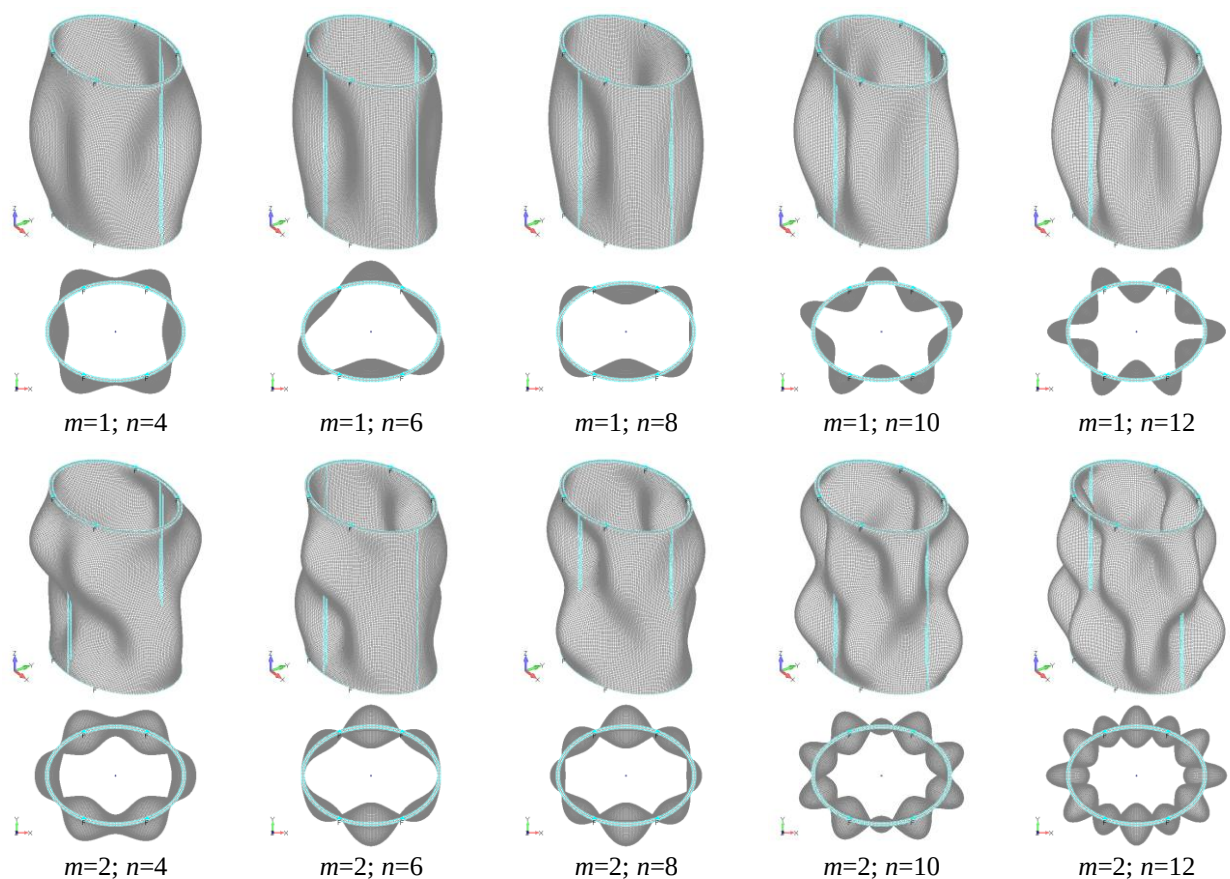


Рис. 7.9. Форми коливань оболонки (СС) із значенням $\varepsilon=0,7$ в двох різних положеннях

Для кращої візуалізації наведемо відповідні форми коливань для оболонки із значенням $\varepsilon=0,7$ (рис. 7.10) з кольоровим розподілом переміщень, де вузловим лініям (нульовим переміщенням) відповідає фіолетовий колір, а пучностями (максимальним переміщенням) – червоний колір.

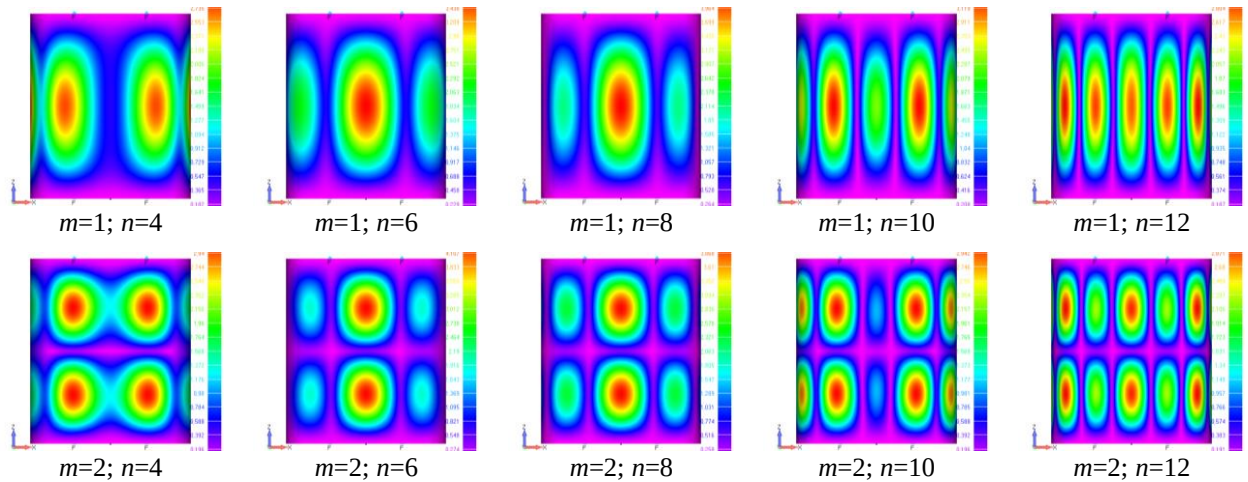


Рис. 7.10. Форми коливань оболонки (CC) $\varepsilon=0,7$ з кольоровим розподілом переміщень

Для оболонки із значенням $\varepsilon=0,9$ класифікація форм стає більш складним процесом, оскільки, із-за її конструктивної жорсткості деякі форми коливань мають «однакову» кількість півхвиль m і n (рис. 7.11), для порівняння на рисунку представлені відповідні форми коливань для оболонки із значенням $\varepsilon=0,7$. Результати представлені на рис. 7.8 дають можливість встановити приблизний частотний діапазон пошуку відповідної форми коливань циліндричних оболонок різних ексцентриситетів, що є необхідним при експериментальному визначенні частот і форм вільних коливань.

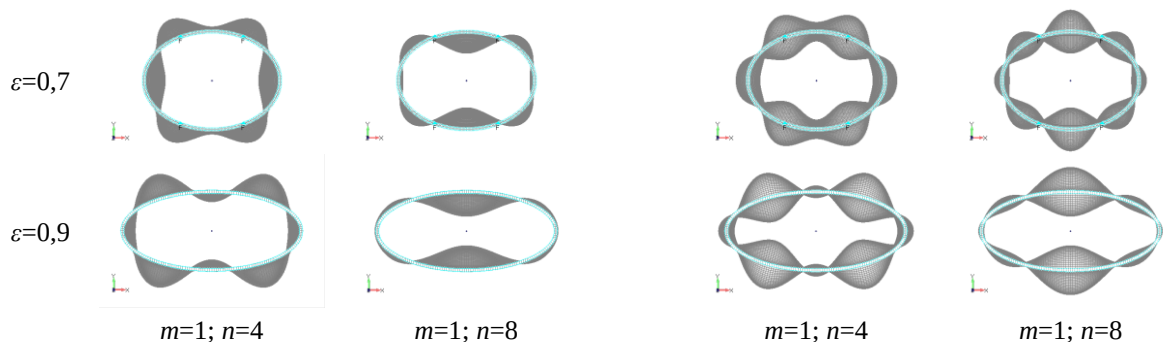


Рис. 7.11. Форми коливань оболонки (CC) $\varepsilon=0,9$ з «однаковою» кількістю півхвиль m і n

Для всіх розглянутих оболонок (СС) визначені частоти (таблиця 7.10) і форми згинних та крутильних коливань (рис. 7.12), визначені симетричні $\text{Form}(m; n)$ та несиметричні $\text{Form}(m'; n')$ форми поперечних та згинних коливань (рис. 7.13), при цьому різниця між такими частотами збільшується із збільшенням ексцентриситету. Частоти крутильних коливань для всіх оболонок є однаковими.

Таблиця 7.10

Частоти різних видів коливань циліндричних оболонок (СС) з різним ε

Form	$f, \text{Гц}$									
	$\varepsilon=0$	$\varepsilon=0,1$	$\varepsilon=0,2$	$\varepsilon=0,3$	$\varepsilon=0,4$	$\varepsilon=0,5$	$\varepsilon=0,6$	$\varepsilon=0,7$	$\varepsilon=0,8$	$\varepsilon=0,9$
Згин	8901	8882	8822	8717	8561	8342	8041	7639	7151	11352
Згин'	8902	8921	8922	9085	9239	9455	9749	10135	10693	11739
Кручення	13413	13413	13413	13413	13413	13414	13414	13415	13418	13414
$m=1; n=4$	5589	5589	5589	5589	5586	5577	5546	5451	5185	3274
$m'=1; n'=4$	5587	5587	5588	5593	5604	5627	5658	5680	5620	3510
$m=2; n=12$	10610	10610	10606	10587	10529	10391	10098	9545	8584	5222
$m'=2; n'=12$	10606	10606	10606	10607	10608	10601	10548	10351	9851	6974

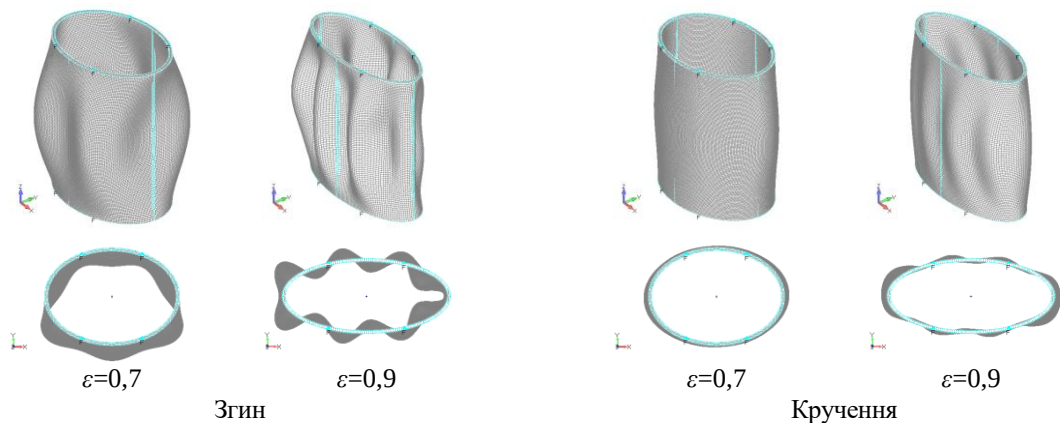


Рис. 7.12. Форми згинних та крутильних коливань оболонки (СС)

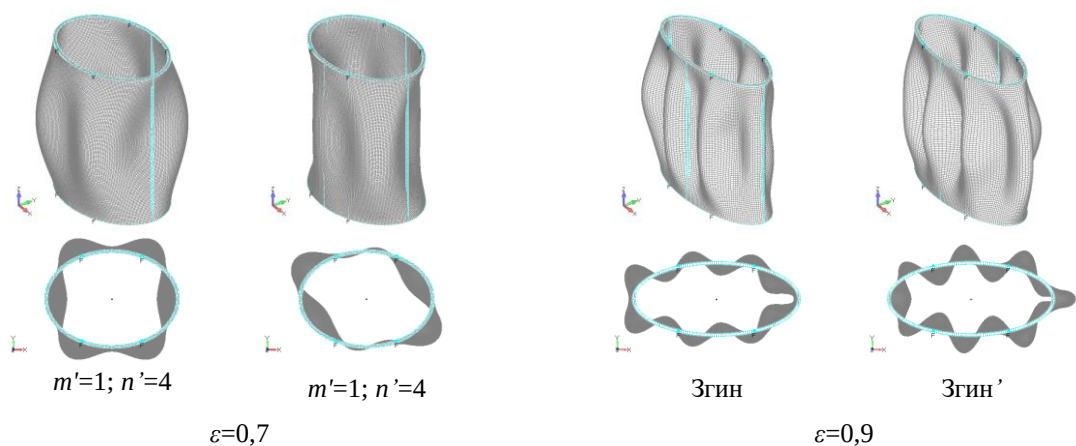


Рис. 7.13. Симетричні та несиметричні форми поперечних та згинних коливань

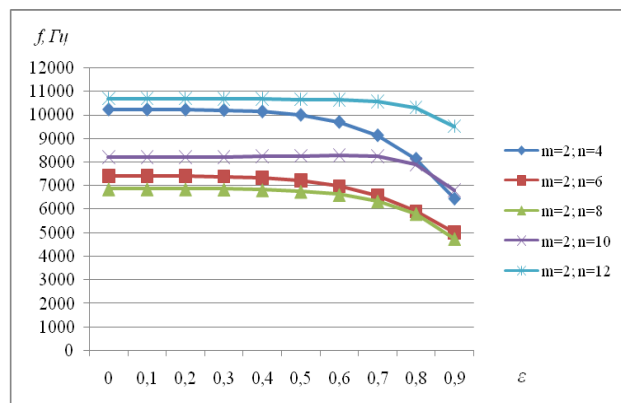
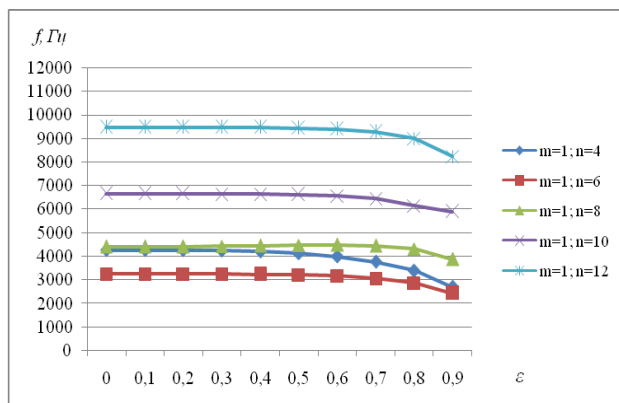
Проведено розрахунки частот і форм вільних коливань циліндричних оболонок еквівалентної маси еліптичного перерізу з різним значенням ексцентриситету [284] з параметрами описаними в попередній задачі з шарнірно обпертими обома торцями (SS).

В результаті розрахунків отримано частоти вільних поперечних коливань циліндричних оболонок (SS) з різним значенням ексцентриситету ε , які представлені в таблиці 7.11 та на гістограмах (рис. 7.14).

Таблиця 7.11

Частоти вільних поперечних коливань циліндричних оболонок (SS) з різним ε

Form		$f, \text{Гц}$									
m	n	$\varepsilon=0$	$\varepsilon=0,1$	$\varepsilon=0,2$	$\varepsilon=0,3$	$\varepsilon=0,4$	$\varepsilon=0,5$	$\varepsilon=0,6$	$\varepsilon=0,7$	$\varepsilon=0,8$	$\varepsilon=0,9$
1	4	4268	4268	4264	4247	4206	4126	3992	3770	3394	2690
1	6	3251	3251	3250	3247	3238	3216	3169	3070	2867	2426
1	8	4420	4420	4421	4431	4449	4473	4486	4459	4317	3877
1	10	6652	6651	6650	6644	6634	6610	6562	6457	6147	5903
1	12	9476	9476	9476	9473	9465	9444	9395	9282	8994	8243
2	4	10235	10235	10231	10210	10151	10007	9707	9141	8151	6462
2	6	7424	7424	7418	7397	7339	7215	6984	6586	5914	4999
2	8	6861	6862	6859	6850	6822	6757	6619	6346	5819	4755
2	10	8210	8210	8212	8219	8238	8268	8291	8235	7898	6807
2	12	10690	10690	10690	10687	10681	10667	10639	10563	10316	9516

Рис. 7.14. Частоти вільних поперечних коливань циліндричних оболонок (SS) з різним ε

Так само як і для оболонок (CC) порядок появи форм вільних поперечних коливань для оболонок (SS) з різними значеннями ексцентриситету зберігається майже при всіх значеннях ε , порядок порушуються тільки для оболонки із значенням $\varepsilon=0,9$, наприклад, Form (2; 4) і Form (2; 10) міняються місцями. Всі форми коливань для оболонок (SS) і

оболонок (CC) є однаковими, відмінність полягає у можливості повздовжньої пружної деформації торців оболонки (SS) за рахунок можливого переміщення вздовж довжини оболонки, тобто осі OZ (рис. 7.15).

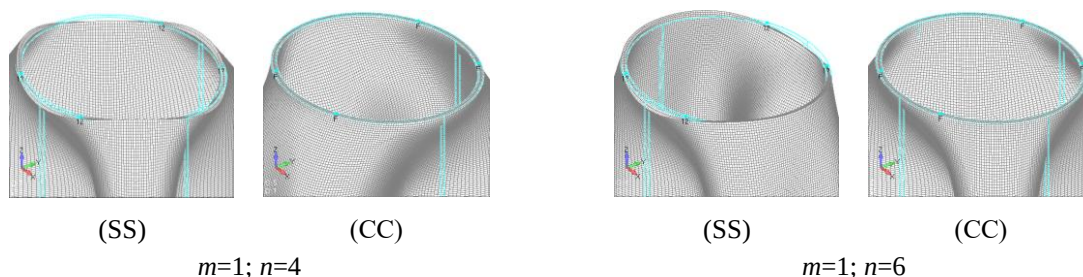


Рис. 7.15. Деформації торців оболонки (SS) $\varepsilon=0,5$ в порівнянні з оболонкою (CC) $\varepsilon=0,5$

Для всіх розглянутих оболонок (SS) визначені частоти (таблиця 7.12) і форми згинних та крутильних коливань, визначені симетричні Form ($m; n$) та несиметричні Form ($m'; n'$) форми поперечних та згинних коливань, різниця між такими частотами збільшується із збільшенням ексцентриситету. Частоти коливань крутильних коливань для всіх оболонок (SS) є однаковими і такими самими, як частоти крутильних коливань для всіх оболонок (CC), що пояснюється неспівпадінням напрямку коливань з напрямком координатної осі OZ, тобто можливість переміщення w не впливає на крутильні коливання.

Таблиця 7.12

Частоти різних видів коливань циліндричних оболонок (SS) з різним ε

Form	$f, \text{Гц}$									
	$\varepsilon=0$	$\varepsilon=0,1$	$\varepsilon=0,2$	$\varepsilon=0,3$	$\varepsilon=0,4$	$\varepsilon=0,5$	$\varepsilon=0,6$	$\varepsilon=0,7$	$\varepsilon=0,8$	$\varepsilon=0,9$
Згин	8242	8226	8175	8086	7950	7755	7477	7080	6549	5101
Згин'	8242	8259	8309	8395	8521	8694	8924	9227	9630	10175
Кручення	13413	13413	13413	13413	13413	13414	13414	13415	13418	13406
$m=1; n=4$	4268	4268	4264	4247	4206	4126	3992	3770	3394	2690
$m'=1; n'=4$	4267	4267	4264	4250	4215	4150	4042	3867	3573	3016
$m=2; n=12$	10235	10235	10231	10210	10151	10007	9707	9141	8151	6462
$m'=2; n'=12$	10231	10231	10231	10230	10225	10207	10145	9951	9464	8312

7.3.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу

Проведено розрахунки частот і форм вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного перерізу еквівалентної маси з різним значенням ексцентриситету [285] з параметрами описаними в підпункті 7.3.1. Всі оболонки розрізались навпіл двома способами: вздовж великої осі (OX) і твірної (рис. 7.16 а) та вздовж малої осі (OY) і твірної (рис. 7.16 б).

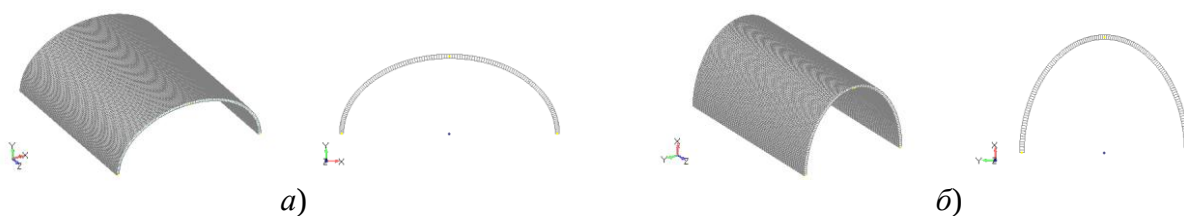


Рис. 7.16. Незамкнуті циліндричні оболонки

Скінченноелементну розбивку проводили *plate*-елементами з розміром сторони 1 мм. Оболонки досліджували при різних варіантах жорстко закріплених (C) і вільних торців (F) (рис. 7.17). Виконано обчислення частот і форм вільних коливань.

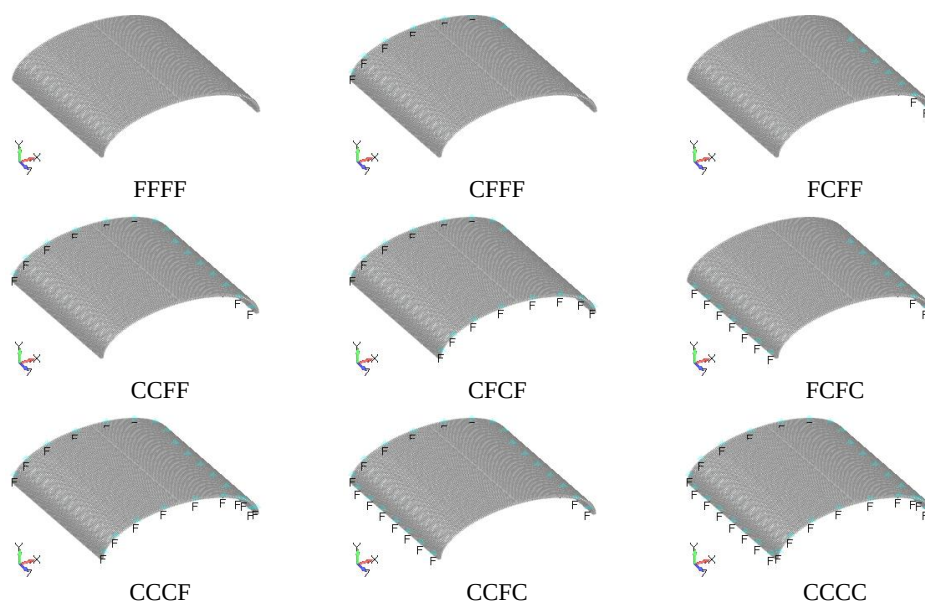


Рис. 7.17. Варіанти закріплення незамкнутих циліндричних оболонок

В результаті проведених числових чисельних розрахунків отримано частоти вільних коливань сталевих незамкнутих циліндричних оболонок

еліптичного поперечного перерізу з різним значенням ексцентриситету, розрізаних навпіл вздовж великої осі (OX) і твірної, з граничними умовами (CFFF), які наведено в таблиці 7.13 і у вигляді точкової діаграми на рис. 7.18 а), де показано залежність частот f з відповідними порядковими номерами від значень ексцентриситету оболонки ε .

Таблиця 7.13

Частоти вільних коливань незамкнутих (OX) циліндричних оболонок (CFFF)

Form	$f, \text{Гц}$									
	ε									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	757	758	762	768	776	787	801	816	829	755
2	845	846	849	854	860	868	874	873	851	817
3	1736	1735	1735	1734	1732	1728	1721	1708	1672	1294
4	2259	2257	2248	2226	2188	2126	2032	1891	1687	1642
5	2372	2377	2391	2416	2451	2502	2568	2647	2728	2675
6	2412	2413	2420	2435	2462	2506	2571	2663	2777	2860
7	3129	3130	3131	3134	3136	3138	3137	3130	3108	3024
8	4439	4446	4467	4502	4544	4582	4576	4494	4308	3618
9	4454	4463	4488	4533	4597	4681	4698	4611	4331	3993
10	4770	4770	4768	4765	4760	4755	4830	4955	4859	4728

Перші десять частот вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різним значенням ексцентриситету, розрізаних навпіл вздовж малої вісі (OY) і твірної, з граничними умовами (CFFF) представлені в таблиці 7.14 та на точковій діаграмі рис. 7.18 б).

Таблиця 7.14

Частоти вільних коливань незамкнутих (OY) циліндричних оболонок (CFFF)

Form	$f, \text{Гц}$									
	ε									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	757	756	753	747	737	723	704	675	631	559
2	845	844	841	836	826	812	791	757	703	604
3	1736	1736	1736	1736	1735	1733	1725	1706	1658	1522
4	2259	2262	2266	2265	2248	2207	2140	2041	1894	1654
5	2372	2368	2354	2329	2293	2242	2173	2078	1944	1736
6	2412	2411	2409	2414	2436	2481	2546	2624	2673	2538
7	3129	3129	3127	3124	3117	3107	3090	3066	3061	3182
8	4439	4432	4410	4370	4310	4218	4093	3921	3680	3307
9	4454	4446	4420	4376	4310	4223	4101	3933	3694	3323
10	4770	4771	4772	4774	4776	4777	4777	4689	4485	4022

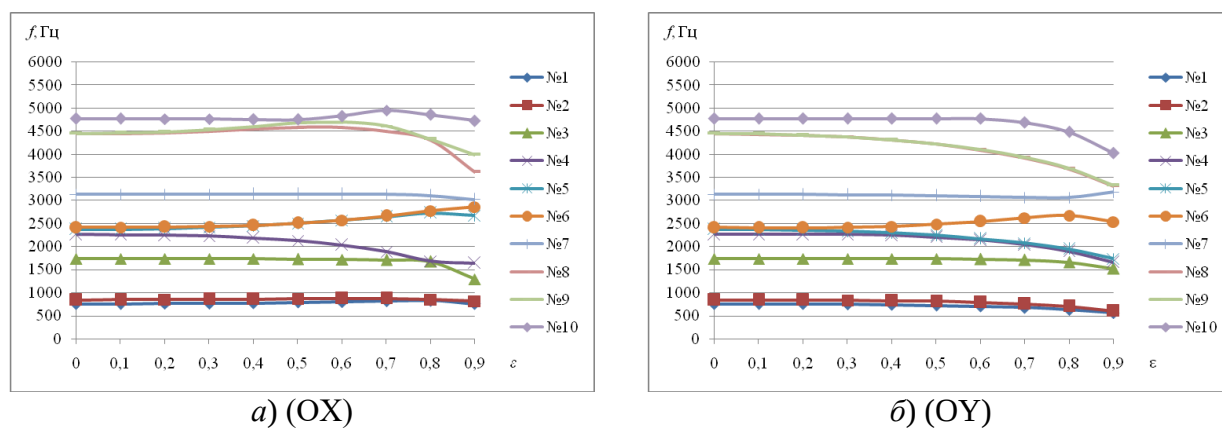


Рис. 7.18. Частоти вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок (CFFF)

Якщо умовно з'єднати точки частот одного порядкового номера лініями, то можна побачити характер зміни частоти одного порядкового номера в залежності від значення ексцентриситету. Порівнюючи діаграми рис. 7.18 можна спостерігати кращу подібність характеру зміни частоти для всіх частот при розрізанні оболонки вздовж малої вісі і твірної. Максимальні відхилення між частотами одного порядкового номера у обох варіантах розрізання спостерігається на восьмій частоті, а мінімальне – при розрізанні оболонки вздовж великої вісі і твірної на другій частоті, при розрізанні оболонки вздовж малої вісі і твірної на сьомій частоті. При другому варіанті розрізання спостерігається більше подібних пар кривих, що відображають схожий характер зміни частоти. Подібні криві спостерігаються в підпункті 7.3.1.

Перші десять форм коливань для оболонок з двома різними варіантами розрізання при значенні ексцентриситету 0,9 з граничними умовами CFFF представлені на рис. 7.19 і 7.20.

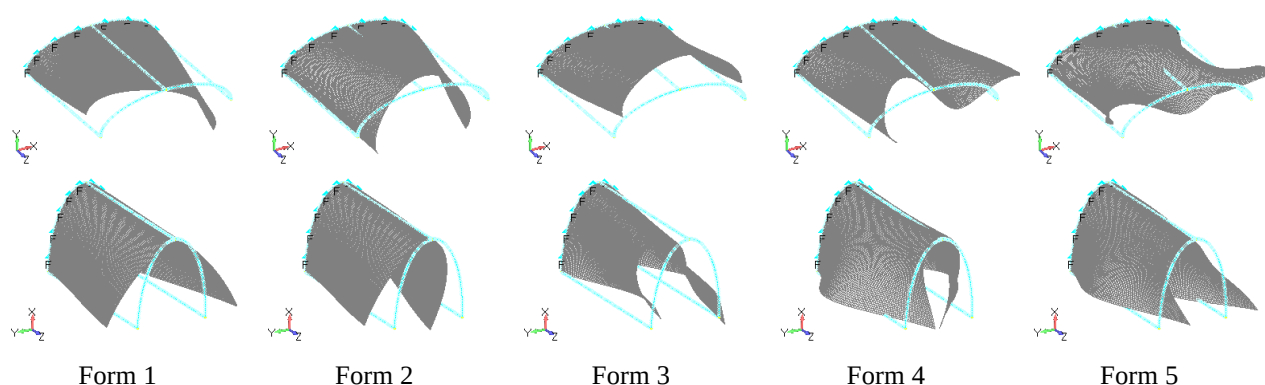


Рис. 7.19. Форми 1-5 вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок (CFFF)

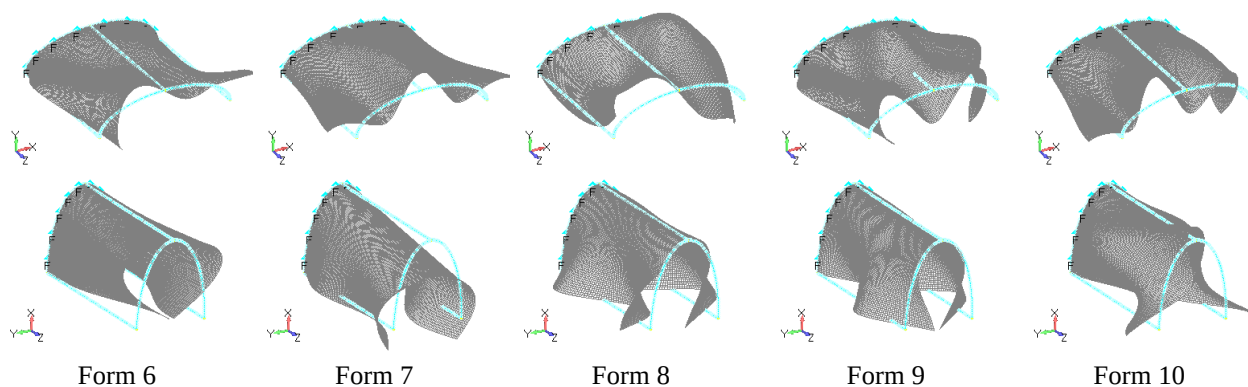


Рис. 7.20. Форми 6-10 вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок (CFFF)

Перші десять частот вільних коливань сталевих незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різним значенням ексцентриситету розрізаних навпіл вздовж великої вісі (OX) і твірної з граничними умовами CFCF представлені в таблиці 7.15 та на точковій діаграмі рис. 7.21 а).

Таблиця 7.15

Частоти вільних коливань незамкнутих (OX) циліндричних оболонок (CFCF)

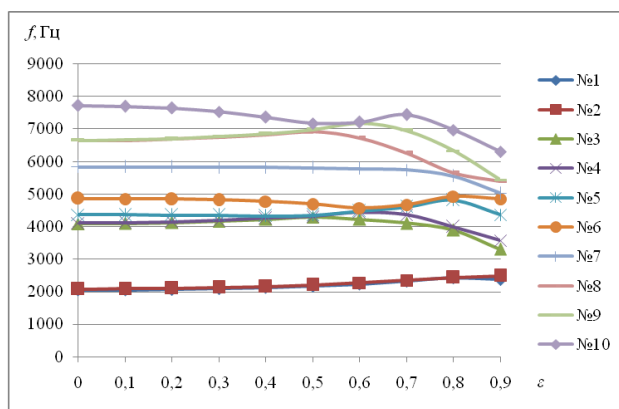
Form	$f, \text{Гц}$									
	ε									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	2051	2055	2068	2091	2125	2172	2236	2321	2424	2373
2	2083	2087	2101	2124	2158	2206	2269	2349	2430	2490
3	4087	4095	4119	4162	4224	4289	4222	4103	3896	3309
4	4114	4122	4147	4191	4256	4314	4438	4360	3995	3570
5	4360	4359	4354	4345	4325	4350	4482	4607	4817	4363
6	4858	4854	4843	4819	4776	4701	4574	4668	4929	4849
7	5838	5836	5832	5826	5816	5804	5784	5747	5553	5023
8	6639	6650	6683	6742	6825	6913	6729	6266	5660	5391
9	6652	6663	6698	6760	6853	6987	7177	6955	6327	5439
10	7724	7703	7640	7529	7369	7173	7207	7447	6970	6306

Перші десять частот вільних коливань сталевих незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різним значенням ексцентриситету, розрізаних навпіл вздовж малої вісі (OY) і твірної з граничними умовами CFCF представлені в таблиці 7.16 та на точковій діаграмі рис. 7.21 б).

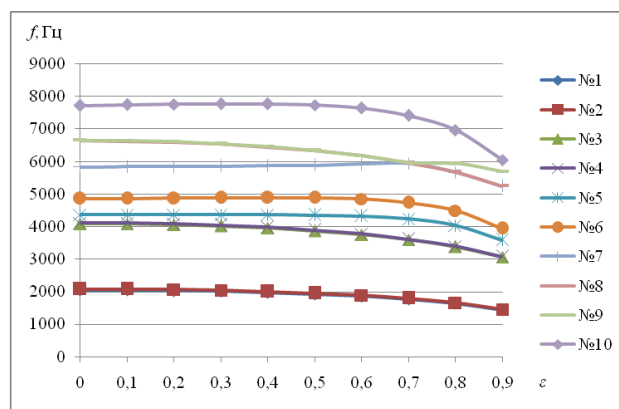
Таблиця 7.16

Частоти вільних коливань незамкннутих (ОУ) циліндричних оболонок (CFCF)

Form	$f, \text{Гц}$									
	ε									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	2051	2047	2034	2011	1977	1929	1864	1774	1647	1444
2	2083	2079	2065	2042	2007	1957	1889	1794	1658	1450
3	4087	4079	4055	4014	3953	3868	3753	3598	3383	3060
4	4114	4106	4081	4039	3976	3890	3774	3617	3400	3074
5	4360	4361	4364	4367	4366	4355	4320	4233	4038	3590
6	4858	4861	4870	4882	4891	4886	4846	4736	4489	3940
7	5838	5839	5844	5853	5866	5888	5918	5944	5671	5242
8	6639	6628	6594	6536	6451	6332	6174	5962	5673	5248
9	6652	6640	6606	6546	6459	6339	6178	5971	5943	5687
10	7724	7744	7763	7773	7772	7740	7643	7421	6969	6055



а) (ОХ)



б) (ОУ)

Рис. 7.21. Частоти вільних коливань незамкннутих циліндричних оболонок (CFCF)

Порівнюючи діаграми рис. 7.21 можна спостерігати, так само як і при варіанті закріплення CFFF, кращу подібність характеру зміни частоти для всіх значень ексцентриситету при розрізанні оболонки вздовж малої вісі і твірної. При розрізанні оболонки вздовж великої вісі і твірної характер зміни частоти для всіх значень ексцентриситету є неоднозначним. Максимальні відхилення між частотами одного порядкового номера у обох варіантах розрізання спостерігається, як і в попередньому випадку, на вищих частотах, а мінімальне – при розрізанні оболонки вздовж великої вісі і твірної на шостій частоті, при розрізанні оболонки вздовж малої вісі і твірної на першій частоті. При другому варіанті розрізання спостерігається подібність для всіх кривих, що відображає схожий характер зміни частоти.

Перші десять форм коливань для оболонок з двома різними варіантами розрізання при значенні ексцентриситету 0,9 з граничними умовами CFCF представлені на рис. 7.22 і 7.23.

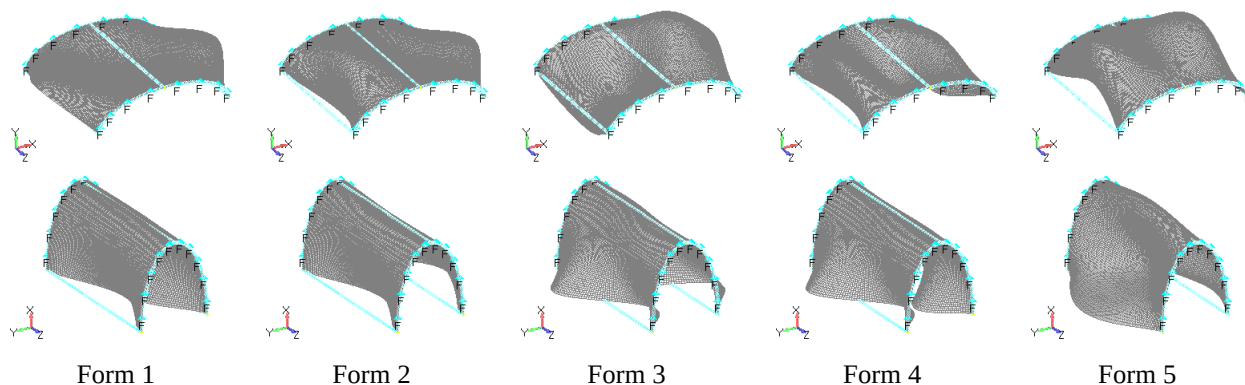


Рис. 7.22. Форми 1-5 вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок (CFCF)

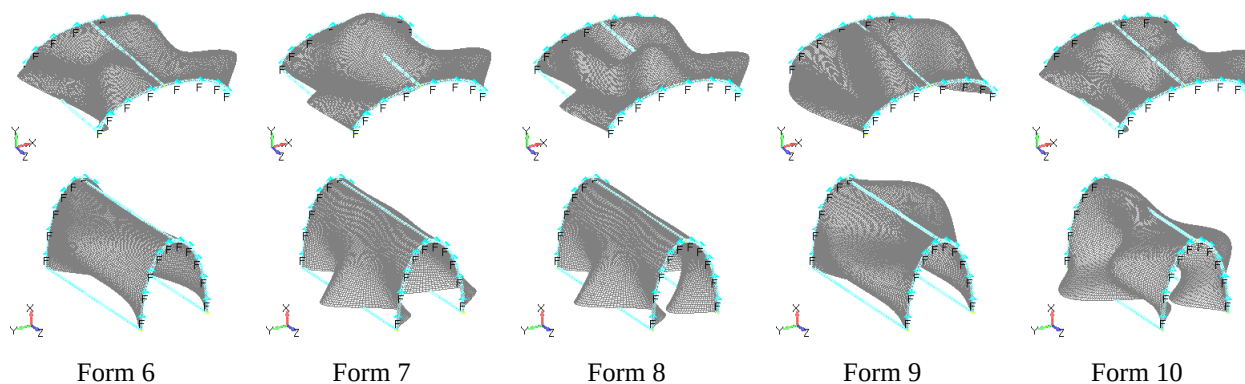


Рис. 7.23. Форми 6-10 вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок (CFCF)

Перші десять частот вільних коливань сталевій незамкнутій циліндричній оболонці еліптичного поперечного перерізу із значенням ексцентриситету $\epsilon=0,9$ розрізаної навпіл вздовж малої вісі (OX) і твірної з різними граничними умовами на торцях представлені в таблиці 7.17.

Перші десять частот вільних коливань сталевій незамкнутій циліндричній оболонці еліптичного поперечного перерізу із значенням ексцентриситету $\epsilon=0,9$ розрізаної навпіл вздовж великої вісі (OY) і твірної з різними граничними умовами на торцях представлені в таблиці 7.18.

Таблиця 7.17

Частоти вільних коливань незамкнутої (ОХ) циліндричної оболонки

Form	$f, \text{Гц}$								
	FFFF	CFFF	FCFF	CCFF	CFCF	FCFC	CCCF	CCFC	CCCC
1	395	755	92	835	2373	1375	2442	2164	3337
2	532	817	218	1399	2490	1893	3270	2612	3762
3	932	1294	465	2341	3309	1999	3664	3862	5337
4	1478	1642	569	2786	3570	2973	4859	4155	5690
5	1865	2675	1354	3608	4363	4248	4947	5415	6165
6	2874	2860	1377	3678	4849	4460	5291	5578	7317
7	3082	3024	2547	4132	5023	4692	6049	5777	7423
8	3226	3618	2559	5180	5391	5494	6698	6227	7635
9	3237	3993	3163	5292	5439	5588	7296	6546	8010
10	4286	4728	4199	5516	6306	6118	7470	7569	9396

Таблиця 7.18

Частоти вільних коливань незамкнутої (ОУ) циліндричної оболонки

Form	$f, \text{Гц}$								
	FFFF	CFFF	FCFF	CCFF	CFCF	FCFC	CCCF	CCFC	CCCC
1	379	559	148	602	1444	874	1448	2690	4469
2	439	604	215	1646	1450	2425	3067	2745	5254
3	643	1522	268	1871	3060	2505	3703	4526	5814
4	1251	1654	449	2752	3074	3644	4950	4932	7026
5	1529	1736	1053	3314	3590	4398	5245	5711	7131
6	1909	2538	1232	4095	3940	4852	5687	6710	7218
7	1936	3182	1924	4139	5242	5645	6161	6798	8874
8	2444	3307	2439	4589	5248	6135	7096	7474	9130
9	2746	3323	2606	5462	5687	6631	7283	7593	9159
10	3551	4022	3582	5568	6055	6766	7985	7598	9473

Порівнюючи частоти, представлені в таблиці 7.17 і 7.18, можна спостерігати мінімальні частоти для перших десяти частот для оболонок з граничними умовами FCFF і максимальні частоти для оболонок з граничними умовами CCCC. Перші сім частот оболонок з вільними краями значно вищі ніж перші сім частот оболонок з граничними умовами FCFF і мають малі відхилення між 8-10 частотою.

Різний спосіб розрізання оболонок значно впливає на характер зміни частоти одного порядкового номера в залежності від значення ексцентриситету. Комбінування різних варіантів жорсткого закріплення та вільних країв дає можливість керувати частотами вільних коливань в досить широкому діапазоні.

Проведено розрахунки частот і форм вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки еліптичного перерізу зі значенням ексцентриситету

$\varepsilon=0,7$ сталої товщини [286] з параметрами описаними в підпункті 7.3.1. Оболонка розрізалась (розкривалась) на заданий кут 2φ (рис. 7.24).

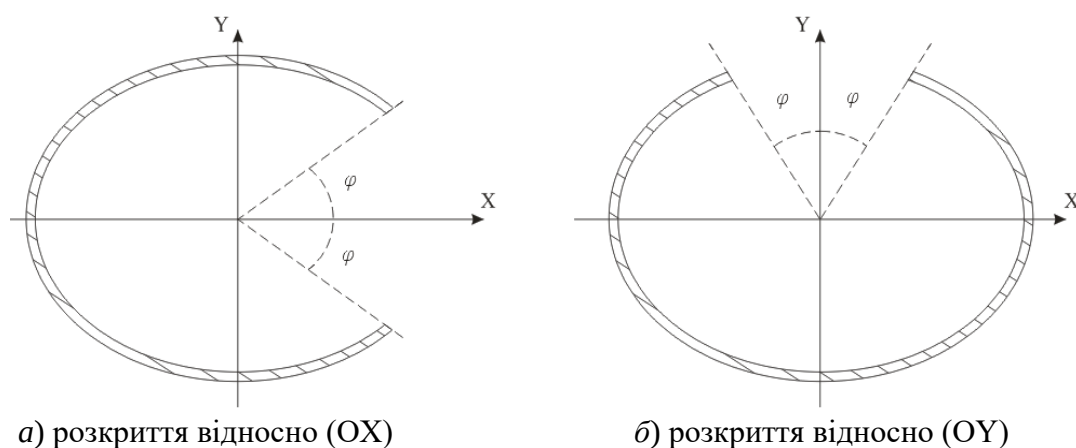


Рис. 7.24. Способи розкриття оболонки

В поперечному перерізі оболонка має форму еліпса тому розкриття оболонки проводились двома способами відносно великої (OX) (рис. 7.24 а) та малої (OY) (рис. 7.24 б) півосей. Кут розкриття оболонки φ обирався в межах від 0^0 до 90^0 з кроком 5^0 . Оболонки досліджувались при граничних умовах (CFFF) і (CFCF) (рис. 7.17).

Перші десять частот вільних коливань некругової циліндричної оболонки розкритої відносно великої півосі (OX) з граничними умовами (CFFF) [287] в залежності від кута розкриття φ представлені в таблиці 7.19.

Перші десять частот вільних коливань некругової циліндричної оболонки розкритої відносно великої півосі (OX) з граничними умовами (CFCF) в залежності від кута розкриття φ представлені в таблиці 7.20.

Для порівняння в таблицях 7.19 і 7.20 наведені частоти для замкнутої циліндричної оболонки еліптичного перерізу зі значенням ексцентриситету $\varepsilon=0,7$ сталої товщини еквівалентної маси з відповідними граничними умовами.

Таблиця 7.19

Частоти вільних коливань некругових оболонок (ОХ) (CFFF)

Form	Замк.	f, Гц								
		0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
1	1712,15	846,03	811,37	781,02	747,90	716,77	692,02	674,06	662,82	658,03
2	1761,99	863,84	824,14	784,38	756,17	736,45	720,55	706,89	694,15	681,65
3	2154,29	1548,68	1547,21	1564,36	1569,32	1530,23	1504,60	1494,16	1499,90	1522,09
4	2168,01	1721,82	1675,00	1619,25	1598,03	1645,16	1700,69	1755,22	1793,59	1803,11
5	3209,49	1937,89	1999,70	2094,43	2196,94	2229,06	2182,87	2133,29	2091,93	2060,14
6	3849,46	2447,41	2486,20	2406,98	2329,72	2261,73	2207,35	2160,31	2113,85	2074,02
7	3861,22	2566,65	2513,73	2456,37	2378,94	2306,59	2244,98	2209,52	2220,21	2281,95
8	4109,31	2648,21	2556,10	2461,50	2388,44	2417,80	2558,51	2735,09	2934,96	3156,39
9	4487,56	2707,16	2712,80	2856,83	3050,10	3270,34	3515,15	3783,79	3931,53	3845,56
10	4518,43	3279,28	3506,17	3755,49	4021,85	4092,37	4046,56	3998,27	3996,11	3943,19
Form	f, Гц									
	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
1	659,15	657,42	646,73	637,90	631,66	628,70	629,66	635,25	646,25	663,53
2	669,29	665,50	676,29	690,50	706,91	724,01	739,84	752,19	758,81	757,84
3	1560,32	1613,63	1680,40	1680,84	1647,97	1622,51	1607,90	1607,96	1626,88	1668,86
4	1786,43	1754,93	1717,81	1757,65	1838,60	1909,98	1961,21	1996,53	2023,09	2043,35
5	2038,09	2019,97	2003,85	1993,79	1989,57	1991,47	1999,75	2015,10	2038,72	2071,40
6	2042,98	2026,09	2025,05	2037,16	2068,51	2131,71	2236,05	2374,08	2524,86	2617,87
7	2388,76	2529,97	2698,70	2892,33	3110,91	3244,37	3141,33	3042,50	2963,33	2974,57
8	3399,07	3639,02	3551,85	3450,61	3347,88	3355,76	3628,08	3855,59	3894,82	3925,81
9	3751,72	3678,05	3852,44	3841,68	3836,91	3838,39	3848,52	3867,26	3895,44	3929,65
10	3902,14	3872,35	3853,56	3843,97	3839,72	3846,74	3863,96	3967,36	4305,04	4620,90

Таблиця 7.20

Частоти вільних коливань некругових оболонок (ОХ) (CFCF)

Form	Замк.	f, Гц								
		0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
1	4025,98	2314,79	2224,29	2128,27	2038,80	1961,96	1899,25	1848,58	1806,58	1773,57
2	4052,11	2316,34	2224,60	2129,68	2041,50	1964,81	1900,80	1848,56	1810,65	1780,33
3	4466,06	3924,69	3922,07	3892,74	3828,73	3791,19	3781,36	3797,75	3725,32	3666,44
4	4519,82	4066,10	3977,63	3937,67	3948,51	3922,23	3865,00	3799,89	3726,27	3667,50
5	5450,73	4271,18	4375,90	4305,46	4148,22	4009,30	3893,53	3800,39	3764,09	3743,30
6	5679,91	4602,25	4467,77	4305,65	4148,63	4009,69	3893,68	3806,82	3835,45	3885,06
7	6719,54	4611,75	4467,90	4442,61	4369,55	4385,22	4490,36	4656,99	4724,60	4705,36
8	6759,13	4612,04	4549,17	4520,54	4678,80	4797,20	4812,28	4769,01	4868,87	5118,25
9	7001,00	5253,54	5333,46	5456,02	5336,37	5320,28	5470,26	5741,81	6071,83	6055,24
10	7058,25	5791,75	5626,75	5545,27	5827,49	6145,78	6341,28	6241,78	6139,01	6070,37
Form	f, Гц									
	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
1	1748,67	1731,38	1721,44	1715,49	1710,41	1709,86	1714,07	1723,57	1739,26	1761,67
2	1756,68	1738,42	1724,82	1718,38	1721,65	1730,44	1743,36	1758,79	1775,06	1789,82
3	3620,25	3584,50	3557,41	3539,22	3529,91	3529,90	3538,66	3555,52	3574,63	3597,36
4	3620,87	3584,96	3559,32	3542,71	3534,59	3534,75	3542,04	3555,81	3581,02	3611,99
5	3747,13	3776,71	3832,52	3914,64	3971,01	3969,34	3978,81	4006,15	4058,79	4145,32
6	3932,74	3965,03	3977,66	3976,52	4022,88	4155,82	4309,82	4473,86	4621,61	4712,17
7	4730,00	4813,91	4962,84	5173,24	5439,55	5684,86	5627,76	5596,60	5625,87	5766,63
8	5397,06	5678,06	5827,39	5804,85	5748,71	5756,15	5868,83	5887,84	5916,51	5952,42
9	5988,35	5938,21	5912,64	5885,05	5869,22	5868,68	5878,48	5895,09	5922,13	5956,01
10	6004,35	5952,20	5918,72	5903,54	5881,95	5873,54	6138,45	6572,65	7075,32	7366,03

Перші дві частоти вільних коливань замкнутої (Замк.) некругової циліндричної оболонки (CFFF) більші в два рази в порівнянні з відповідними частотами оболонки з розрізом ($\varphi=0^\circ$) вздовж твірної та великої півосі та в 1,7 разу у випадку (CFCF).

Порівняння перших чотирьох частот вільних коливань циліндричної оболонки (CFFF) та циліндричної оболонки (CFCF) з різним кутом розкриття (OX) представлені на рис. 7.25 а), б) відповідно. Перші дві частоти відповідають симетричним та несиметричним формам коливань вільних торців вздовж розрізу. Максимальне значення першої частоти спостерігається при куті розкриття $\varphi=0^\circ$ відносно великої півосі (OX) при двох розглянутих граничних умовах. Для оболонки (CFCF) при куті розкриття $\varphi \geq 30^\circ$ відносно великої півосі (OX) третя та четверта частота відповідають коливанням вільних торців, а для кутів $\varphi < 30^\circ$ спостерігаються коливання вздовж контуру оболонки. Для оболонки (CFFF) спостерігається розбіжність третьої та четвертої частоти до 20%.

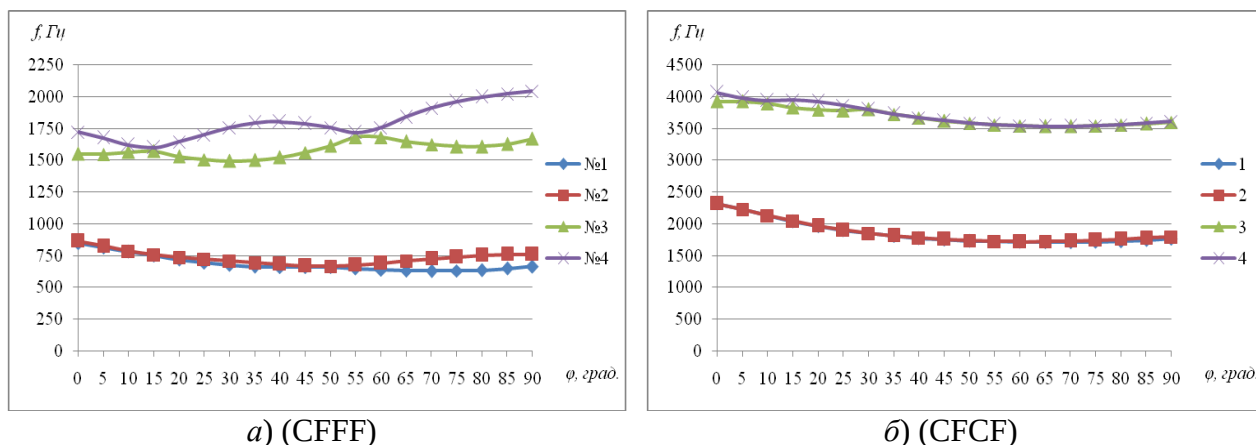


Рис. 7.25. Порівняння частот вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок (OX)

Перші десять частот вільних коливань некругової циліндричної оболонки розкритої відносно малої півосі (OY) з граничними умовами (CFFF) в залежності від кута розкриття φ представлені в таблиці 7.21.

Перші десять частот вільних коливань некругової циліндричної оболонки розкритої відносно малої півосі (OY) з граничними умовами (CFCF) в залежності від кута розкриття φ представлені в таблиці 7.22.

Таблиця 7.21

Частоти вільних коливань некругових оболонок (ОУ) (CFFF)

Form	Замк.	$f, \text{Гц}$								
		0 ⁰	5 ⁰	10 ⁰	15 ⁰	20 ⁰	25 ⁰	30 ⁰	35 ⁰	40 ⁰
1	1712,15	707,05	719,42	733,79	750,52	769,96	792,46	808,99	825,09	841,31
2	1761,99	719,31	732,59	746,74	761,64	777,10	792,95	818,29	847,47	879,47
3	2154,29	1657,3	1657,59	1662,46	1673,10	1690,99	1717,97	1756,35	1747,25	1705,35
4	2168,01	1821,93	1876,69	1935,11	1920,45	1879,15	1835,80	1791,42	1808,92	1878,96
5	3209,49	2021,17	1996,02	1963,16	2004,22	2073,12	2144,04	2215,14	2286,93	2360,95
6	3849,46	2043,80	2070,41	2100,06	2133,59	2171,69	2215,20	2264,76	2320,59	2379,42
7	3861,22	2107,47	2124,24	2155,20	2197,50	2253,03	2326,03	2420,84	2540,20	2542,61
8	4109,31	2417,33	2516,64	2623,22	2731,35	2813,05	2807,97	2737,63	2644,07	2685,75
9	4487,56	3237,41	3245,54	3174,01	3109,92	3082,67	3154,69	3307,25	3502,51	3538,38
10	4518,43	3317,77	3384,57	3545,52	3721,65	3896,37	3841,62	3748,16	3646,87	3733,61
Form	$f, \text{Гц}$									
	45 ⁰	50 ⁰	55 ⁰	60 ⁰	65 ⁰	70 ⁰	75 ⁰	80 ⁰	85 ⁰	90 ⁰
1	857,99	875,88	896,14	920,23	949,24	918,66	877,82	839,21	811,70	802,20
2	912,54	942,87	963,91	968,06	951,70	982,19	1011,70	1016,40	970,32	882,12
3	1669,49	1646,17	1645,47	1679,61	1758,08	1719,59	1600,78	1531,41	1546,37	1646,72
4	1970,22	2086,51	2139,42	2001,00	1858,04	1884,23	2056,45	2238,14	2116,39	1938,13
5	2385,37	2275,60	2237,06	2414,26	2614,32	2651,92	2489,41	2354,37	2554,31	2637,01
6	2437,99	2516,81	2594,22	2665,26	2719,97	2749,43	2770,11	2738,91	2689,23	2641,97
7	2492,52	2557,51	2642,22	2730,81	2827,17	2798,33	2830,87	2845,09	2827,58	2977,84
8	2858,79	3051,53	3108,14	2983,83	2840,68	3008,89	3323,87	3725,51	4207,50	4396,76
9	3424,02	3315,90	3376,25	3658,79	4017,83	4449,57	4607,07	4432,90	4342,86	4642,80
10	4003,44	4317,75	4589,97	4534,68	4501,87	4530,82	4649,52	4848,66	4953,29	4860,35

Таблиця 7.22

Частоти вільних коливань некругових оболонок (ОУ) (CFCF)

Form	Замк.	f, Гц								
		0 ⁰	5 ⁰	10 ⁰	15 ⁰	20 ⁰	25 ⁰	30 ⁰	35 ⁰	40 ⁰
1	4025,98	1775,62	1797,08	1821,90	1850,52	1883,34	1921,33	1965,22	2015,79	2073,62
2	4052,11	1776,11	1797,51	1822,10	1850,74	1884,20	1923,05	1967,91	2019,28	2077,16
3	4466,06	3604,63	3634,94	3670,09	3711,16	3759,03	3815,13	3880,79	3957,70	4047,18
4	4519,82	3604,68	3635,00	3670,13	3711,21	3759,11	3815,31	3881,10	3958,11	4047,58
5	5450,73	4039,66	4058,57	4081,74	4109,56	4122,22	4107,07	4095,52	4090,20	4094,78
6	5679,91	4169,25	4167,56	4154,99	4138,86	4141,85	4177,30	4212,38	4240,07	4250,40
7	6719,54	4333,92	4418,33	4527,24	4656,16	4805,32	4920,64	4931,29	4953,41	5007,70
8	6759,13	4630,19	4724,69	4807,16	4868,12	4903,97	4976,64	5171,99	5388,93	5581,41
9	7001,00	5608,11	5620,32	5663,82	5751,84	5892,99	6070,46	5993,34	5910,95	5877,83
10	7058,25	5921,71	5983,22	6029,65	6079,36	6114,59	6087,04	6289,32	6405,09	6524,91
Form	f, Гц									
	45 ⁰	50 ⁰	55 ⁰	60 ⁰	65 ⁰	70 ⁰	75 ⁰	80 ⁰	85 ⁰	90 ⁰
1	2138,92	2208,02	2275,18	2337,60	2391,10	2433,34	2440,75	2400,80	2344,62	2289,75
2	2140,81	2210,70	2286,10	2358,73	2417,44	2447,92	2462,31	2469,88	2435,25	2339,68
3	4114,11	4153,86	4146,38	4099,24	4080,17	4118,93	4140,44	3997,91	3928,21	3991,92
4	4150,44	4197,65	4217,63	4296,12	4340,79	4281,23	4242,72	4457,42	4641,85	4406,59
5	4150,47	4265,78	4390,16	4516,03	4631,68	4716,91	4754,65	4750,29	4712,47	4588,17
6	4235,82	4266,79	4392,94	4520,47	4634,67	4722,83	4775,36	4775,79	4712,68	4636,21
7	5113,59	5284,69	5326,62	5209,44	5180,47	5335,56	5684,06	5436,13	5165,95	5476,31
8	5575,75	5460,98	5530,30	5860,18	6284,96	6302,64	5865,64	6192,53	6752,51	6368,91
9	6076,35	6429,17	6857,18	6973,90	6725,16	6829,60	7009,88	6971,91	6892,55	6901,54
10	6662,19	6817,10	6982,57	7055,67	6983,04	7035,75	7131,63	7186,46	7043,97	7263,19

Перші дві частоти вільних коливань замкнутої (Замк.) некругової циліндричної оболонки (CFFF) більші в 2.4-2.5 рази в порівнянні з відповідними частотами оболонки з розрізом ($\varphi=0^0$) відносно малої півосі (OY) та в 2,3 разів у випадку (CFCF).

Порівняння перших чотирьох частот вільних коливань циліндричної оболонки (CFFF) циліндричної оболонки (CFCF) з різним кутом розкриття (OY) представлені на рис. 7.26 а), б) відповідно. Перші дві частоти відповідають симетричним та несиметричним формам коливань вільних торців вздовж розрізу. Максимальне значення першої частоти для оболонки (CFFF) спостерігається при куті розкриття $\varphi=65^0$ відносно малої півосі (OY), для оболонки (CFCF) спостерігається при куті розкриття $\varphi=75^0$ відносно малої півосі (OY). Для оболонки (CFCF) при куті розкриття $\varphi<45^0$ відносно малої півосі (OY) третя та четверта частота відповідають коливанням вільних торців, а для кутів $\varphi\geq 45^0$ спостерігаються коливання вздовж контуру оболонки. Для оболонки (CFFF) спостерігається розбіжність третьої та четвертої частоти до 32%.

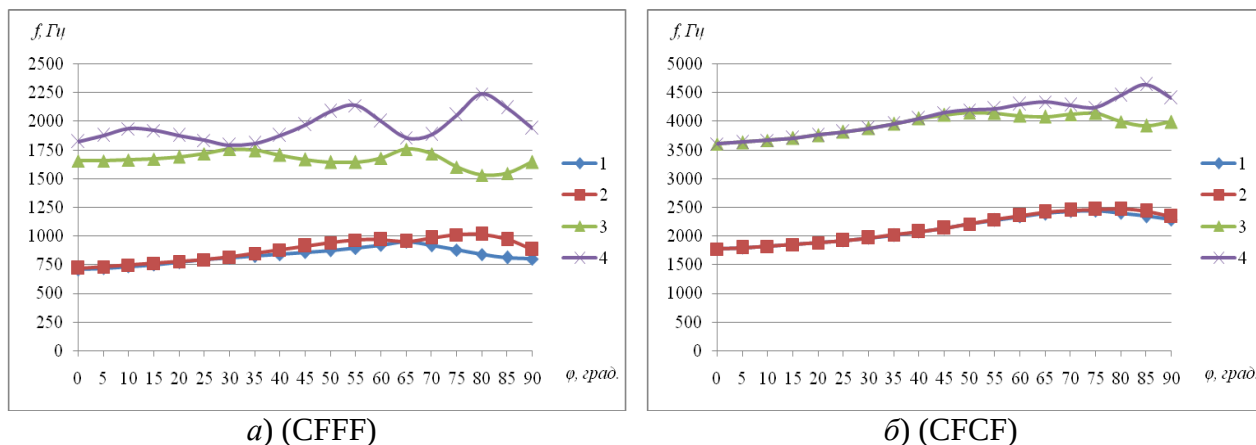


Рис. 7.26. Порівняння частот вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок (OY)

Перші десять форм вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки зі значенням кута розкриття $\varphi=0^0$ (OX) з граничними умовами (CFFF) представлені на рис. 7.27, а з граничними умовами (CFCF) – на рис. 7.28.

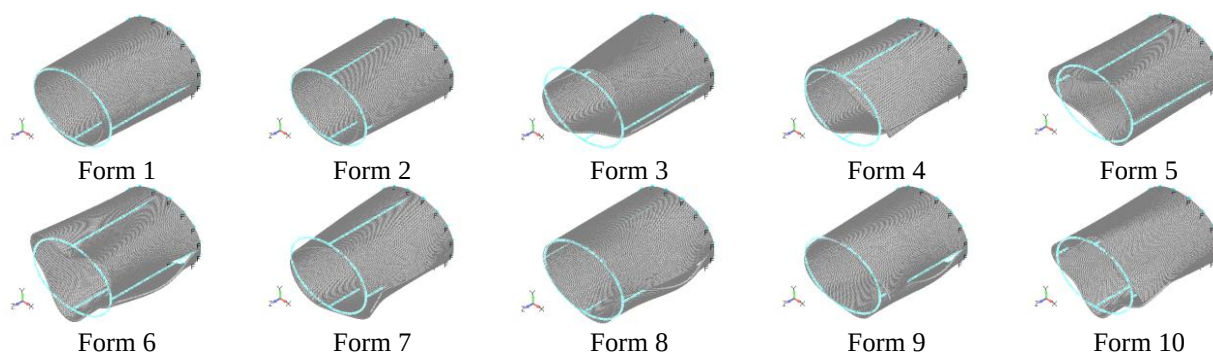


Рис. 7.27. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=0^\circ$ (OX) (CFFF)

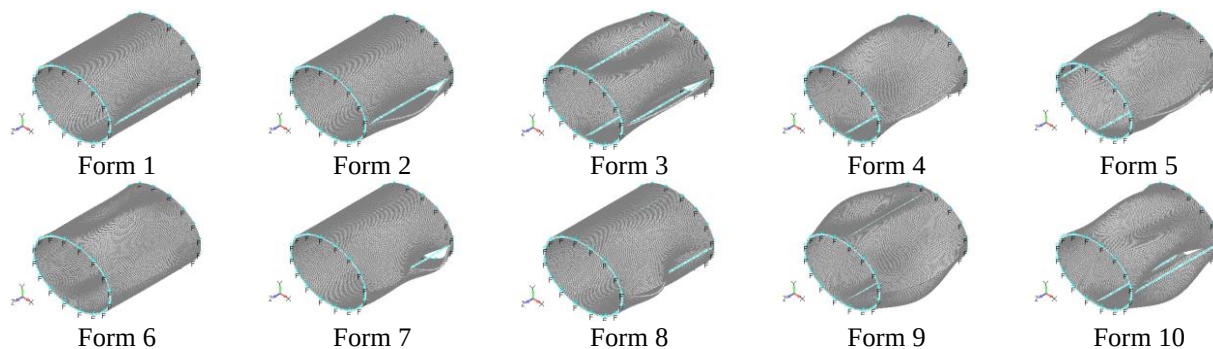


Рис. 7.28. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=0^\circ$ (OX) (CFCF)

Перші десять форм вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки $\varphi=0^\circ$ (OY) (CFFF) представлені на рис. 7.29, а (CFCF) – на рис. 7.30.

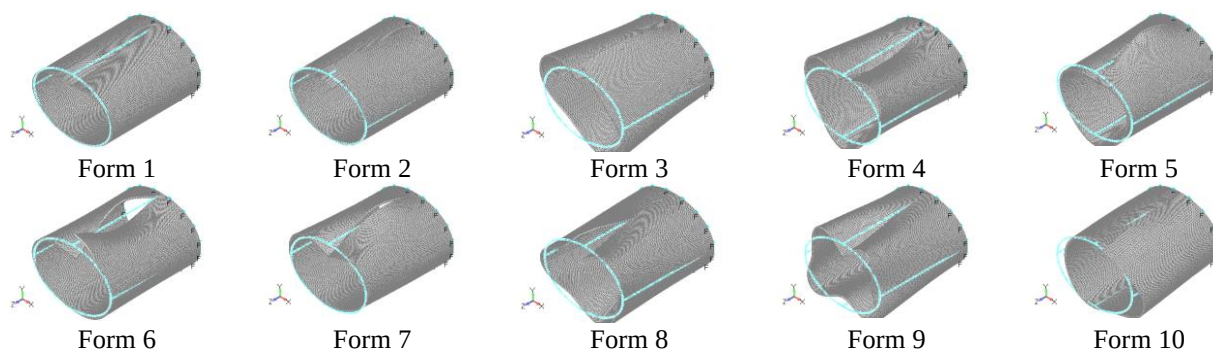


Рис. 7.29. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=0^\circ$ (OY) (CFFF)

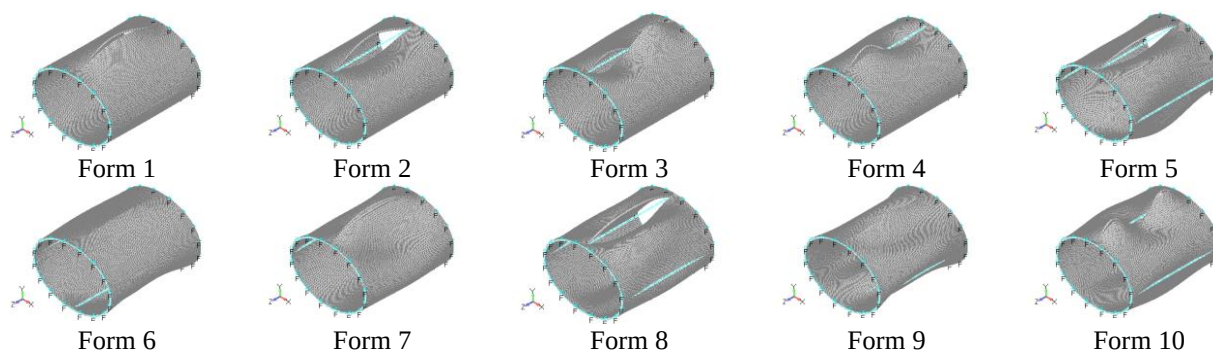


Рис. 7.30. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=0^\circ$ (OY) (CFCF)

Перші десять форм вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки зі значенням кута розкриття $\varphi=90^0$ (OX) з граничними умовами (CFFF) представлені на рис. 7.31, а з граничними умовами (CFCF) – на рис. 7.32.

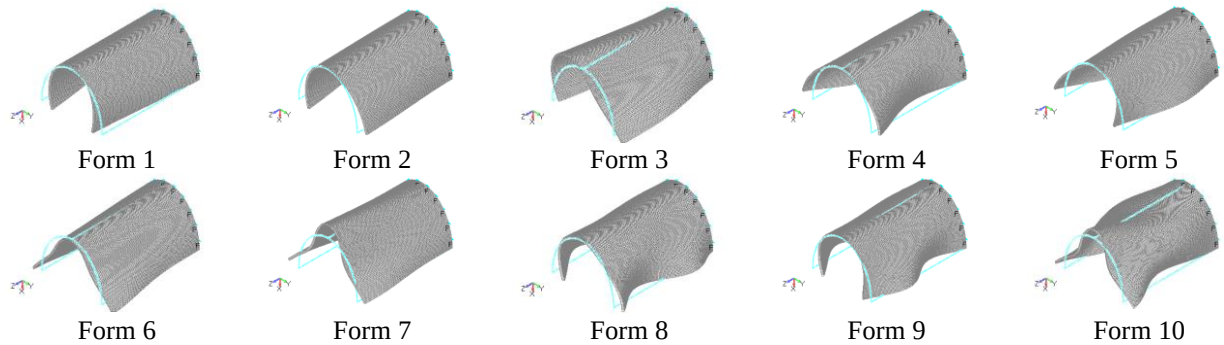


Рис. 7.31. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=90^0$ (OX) (CFFF)

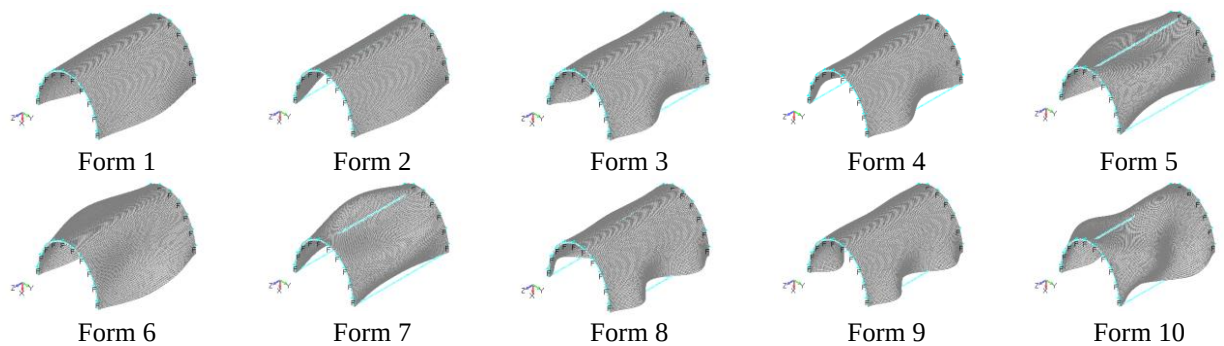


Рис. 7.32. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=90^0$ (OX) (CFCF)

Перші десять форм вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки зі значенням кута розкриття $\varphi=90^0$ (OY) з граничними умовами (CFFF) представлені на рис. 7.33, а з граничними умовами (CFCF) – на рис. 7.34.

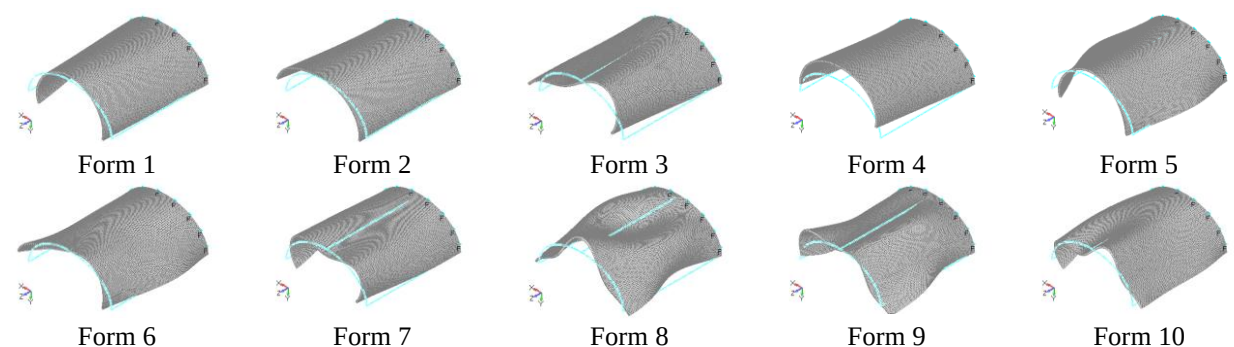


Рис. 7.33. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=90^0$ (OY) (CFFF)

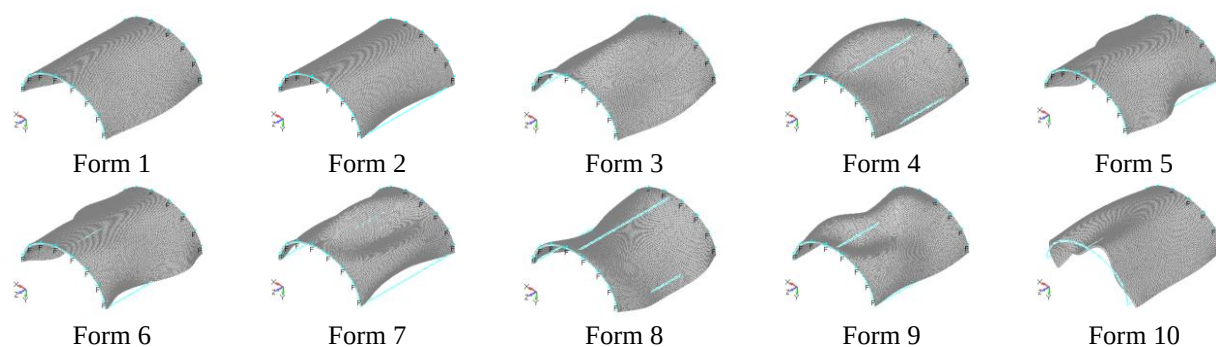


Рис. 7.34. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=90^\circ$ (OY) (CFCF)

Проведено розрахунки частот і форм вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки еліптичного перерізу зі значенням ексцентриситету $\varepsilon=0,7$ змінної товщини ($d_a < d_b$) (рис. 7.35) [288] з параметрами описаними в підпункті 7.3.1, товщина оболонки уздовж великої півосі $d_a=1\text{мм}$, уздовж малої півосі $d_b=2,73\text{мм}$. Оболонка розрізалась (розкривалась) на заданий кут 2φ в межах від 0° до 90° з кроком 10° .

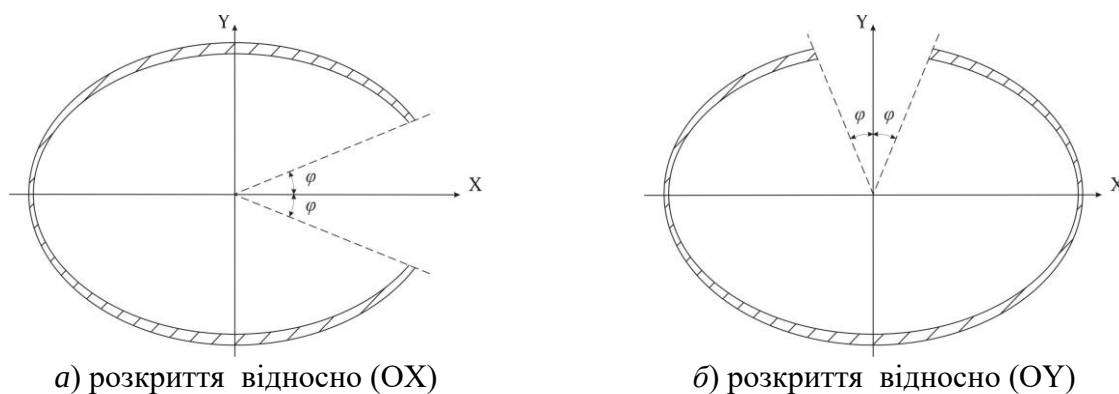


Рис. 7.35. Способи розкриття оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$)

Перші десять частот вільних коливань, розрахованих для некругової циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$) [289], розкритої відносно великої півосі (OX) з граничними умовами (CFFF), в залежності від кута розкриття φ наведені в таблиці 7.23. Для порівняння наведені також частоти для замкнутої некругової циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$) при відповідних граничних умовах. В таблиці 7.24 наведені перші десять частот вільних коливань некругової циліндричної оболонки змінної товщини

($d_a < d_b$) розкритої відносно великої півосі (OX) з граничними умовами (CFCF), в залежності від кута розкриття φ .

Таблиця 7.23

Частоти вільних коливань некругової оболонки (OX) (CFFF) ($d_a < d_b$)

Form	Замк.	$f, \text{Гц}$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1	1565,07	1000,14	900,02	805,32	741,30	704,45	669,47	626,50	593,58	571,19	560,38
2	1757,83	1012,84	925,84	850,37	782,56	721,86	688,59	686,68	691,59	695,49	688,66
3	1991,80	1540,67	1498,58	1480,46	1509,68	1581,97	1691,69	1690,51	1631,23	1593,80	1592,12
4	2022,06	1572,23	1648,68	1762,46	1828,59	1814,79	1757,62	1831,57	1988,27	2113,85	2145,67
5	3142,73	1999,45	2315,00	2296,23	2339,38	2352,71	2313,33	2271,71	2235,60	2209,31	2196,47
6	3677,46	2327,80	2326,32	2477,37	2415,96	2365,33	2334,15	2321,87	2332,07	2395,08	2499,34
7	3702,04	2560,10	2583,46	2504,83	2460,60	2576,96	2841,68	3178,74	3243,18	3082,09	3025,10
8	4129,99	2578,18	2601,86	2722,98	3117,62	3556,72	3593,57	3420,25	3580,25	4053,15	4388,09
9	4441,27	2744,24	3199,26	3722,21	3951,67	2807,25	4110,09	4429,67	4381,54	4362,65	4484,60
10	4457,50	3430,33	4068,94	482,55	4300,98	4300,72	4351,96	4442,44	4511,06	4528,38	4549,72

Таблиця 7.24

Частоти вільних коливань некругової оболонки (OX) (CFCF) ($d_a < d_b$)

Form	Замк.	$f, \text{Гц}$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1	3981,74	2350,97	2312,15	2195,14	2102,47	2038,40	1997,09	1962,35	1927,47	1898,59	1876,80
2	3999,00	2351,46	2315,89	2196,13	2109,49	2049,57	2002,48	1972,12	1956,11	1940,96	1917,47
3	4388,83	3945,95	3909,33	3948,31	3929,64	3923,64	3995,68	4044,68	4003,36	4005,38	4082,49
4	4400,06	3967,45	4072,10	4010,09	4070,31	4144,57	4106,69	4137,59	4241,59	4233,17	4199,66
5	5185,93	3967,53	4146,64	4153,15	4176,60	4210,16	4232,66	4242,06	4248,42	4234,84	4219,08
6	5531,64	4009,46	4146,91	4153,27	4177,82	4210,97	4235,39	4248,93	4334,35	4543,63	4657,96
7	6325,98	4314,69	4353,30	4582,16	4617,27	4694,51	5008,39	5470,17	5549,04	5528,19	5715,35
8	6439,24	4516,27	4713,85	4710,47	5023,99	5504,96	5691,29	5630,20	6049,38	6759,26	7228,14
9	6972,08	5184,39	5173,61	5608,26	6069,81	6051,71	6420,19	7129,35	7241,75	7254,11	7233,60
10	7136,60	5367,81	5834,18	6124,84	6342,06	6922,39	7088,96	7191,64	7242,41	7261,74	7456,36

В таблиці 7.25 наведені перші десять власних частот некругової циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$) розкритої відносно малої півосі (OY) з граничними умовами (CFFF), в залежності від кута розкриття φ . В таблиці 7.26 наведені перші десять власних частот некругової циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$) розкритої відносно малої півосі (OY) з граничними умовами (CFCF) в залежності від кута розкриття φ .

Перші десять форм вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$) зі значенням кута розкриття $\varphi=0^\circ$ (OX) з граничними умовами (CFFF) представлені на рис. 7.36, а з граничними умовами (CFCF) на рис. 7.37.

Частоти вільних коливань некругової оболонки (ОУ) (CFFF) ($d_a < d_b$)

Form	Замк.	$f, \text{Гц}$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1	1565,07	618,34	613,59	612,54	617,77	631,18	651,75	715,07	851,10	947,93	912,85
2	1757,83	628,23	625,71	624,15	624,56	635,74	674,10	746,37	882,49	1102,89	1061,21
3	1991,80	1627,67	1607,30	1596,29	1602,91	1590,48	1518,85	1493,62	1633,96	1478,45	1656,14
4	2022,06	1721,10	1777,57	1749,79	1672,96	1650,43	1760,73	1923,86	1693,02	1999,08	1924,17
5	3142,73	1922,33	1870,74	1906,12	1973,32	2000,12	1989,02	1979,20	2047,87	2181,47	2560,72
6	3677,46	2130,71	2122,19	2098,58	2066,02	2035,56	2011,37	1983,91	2050,45	2284,45	2594,38
7	3702,04	2214,24	2184,93	2166,59	2184,57	2319,50	2347,74	2174,66	2466,78	2359,07	3250,24
8	4129,99	2351,32	2448,10	2564,95	2613,43	2531,58	2584,05	2818,50	2543,81	3450,71	4246,75
9	4441,27	3234,33	3232,65	3152,40	3164,82	3373,92	3263,65	3117,55	3670,74	3812,22	4248,35
10	4457,50	3340,47	3443,33	3684,33	3680,04	3502,44	3769,32	3777,97	3671,16	3821,88	4500,35

Таблиця 7.26

Частоти вільних коливань некругової оболонки (ОУ) (CFFF) ($d_a < d_b$)

Form	Замк.	$f, \text{Гц}$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1	3981,74	1896,83	1864,31	1830,57	1791,42	1757,10	1731,99	1732,10	1822,43	2083,99	2340,01
2	3999,00	1897,44	1864,74	1830,71	1792,60	1759,51	1734,00	1735,92	1832,37	2119,19	2360,52
3	4388,83	4000,80	4017,45	4058,38	3944,79	3807,97	3647,46	3484,58	3388,29	3541,66	3955,35
4	4400,06	4171,47	4142,65	4058,40	3945,02	3808,37	3647,61	3485,60	3388,96	3548,63	3984,60
5	5185,93	4209,32	4142,73	4061,02	4059,14	4029,89	4037,78	4041,30	3958,44	3955,35	4124,53
6	5531,64	4209,41	4142,94	4101,70	4122,76	4201,19	4183,73	4129,58	4262,68	4268,08	4175,48
7	6325,98	4267,39	4377,64	4553,82	4671,97	4622,36	4723,24	4893,60	4767,34	5126,58	5613,17
8	6439,24	4598,37	4675,80	4707,67	4775,56	5057,11	5144,86	5090,73	5320,16	5263,36	5637,96
9	6972,08	5513,20	5568,27	5717,18	5723,77	5609,81	5771,37	5704,12	5343,54	5337,52	5783,19
10	7136,60	5820,00	5882,90	5829,53	6007,34	6423,45	6107,92	5706,15	5930,26	5712,67	5812,21

Перші дві власні частоти замкнутої некругової циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$) жорстко закріпленої по одному торцю більші в 1,6-1,7 разу в порівнянні з відповідними частотами ідентичної оболонки з розрізом (ОХ) та в 2,5-2,8 разу в порівнянні з відповідними частотами ідентичної оболонки з розрізом (ОУ). При закріпленні двох торців перші дві власні частоти замкнутої некругової циліндричної оболонки більше в 1,7 разу відповідних частот некругової циліндричної оболонки з розрізом (ОХ) та в 2,1 разу відповідних частот некругової циліндричної оболонки з розрізом (ОУ).

Максимальне значення першої резонансної частоти спостерігається при куті відкритості розкриття 0° (ОХ) для обох розглянутих умов закріплення. Максимальне значення першої резонансної частоти спостерігається для оболонки з жорстко закріпленим одним торцем при куті відкритості розкриття 80° відносно малої півосі та 90° для закріпленої по двом торцям.

Для оболонок розкритих відносно (ОХ) спостерігається значна

відмінність між третьою і другою частотою для обох способів закріплення, при цьому різниця зростає із збільшенням кута розкриття. Для оболонок розкритих відносно (OY) спостерігається протилежна тенденція, тобто ця різниця спадає.

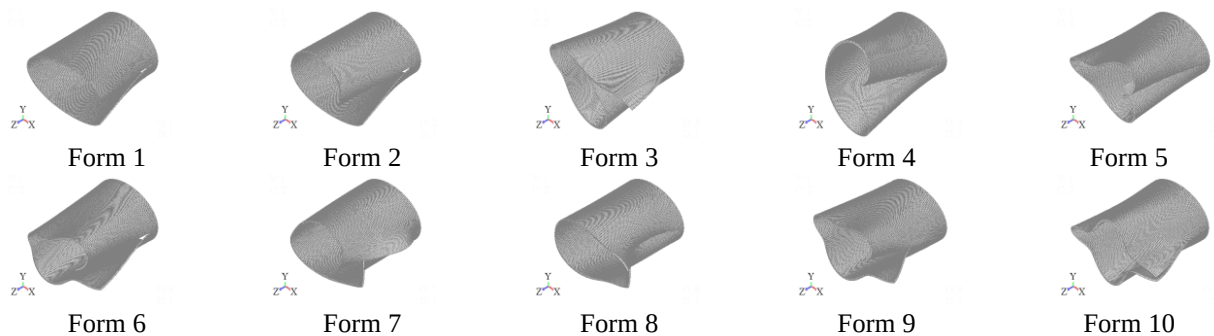


Рис. 7.36. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=0^0$ (OX) (CFFF) ($d_a < d_b$)

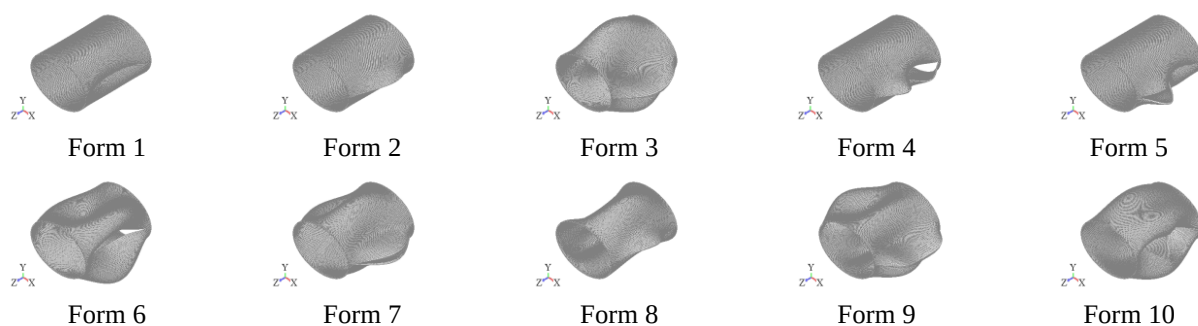


Рис. 7.37. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=0^0$ (OX) (CF CF) ($d_a < d_b$)

Форми вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$) зі значенням кута розкриття $\varphi=0^0$ (OY) з граничними умовами (CFFF) представлені на рис. 7.38, а з (CF CF) – на рис. 7.39.

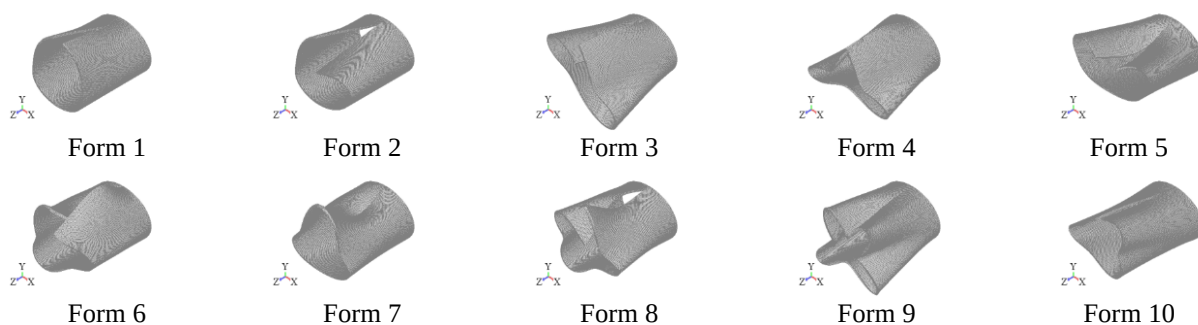


Рис. 7.38. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=0^0$ (OY) (CFFF) ($d_a < d_b$)

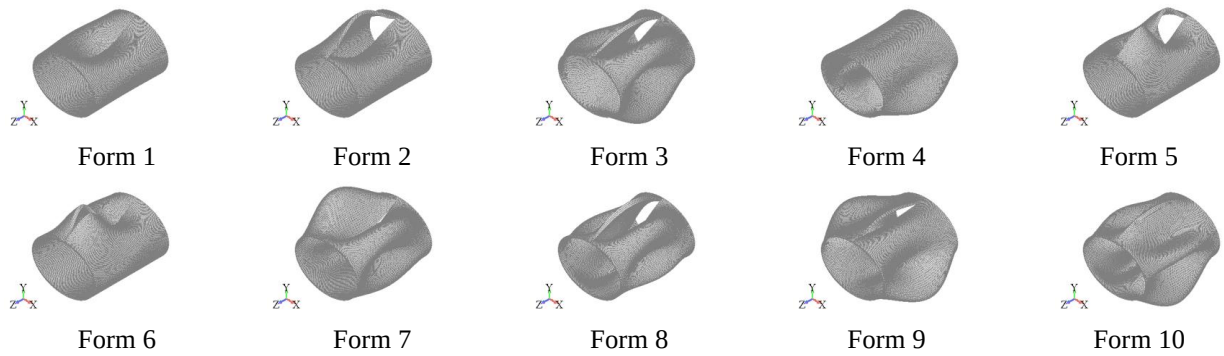


Рис. 7.39. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=0^0$ (OY) (CFCF) ($d_a < d_b$)

Форми вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$) зі значенням кута розкриття $\varphi=90^0$ (OX) з граничними умовами (CFFF) представлені на рис. 7.40, а з (CFCF) – на рис. 7.41.

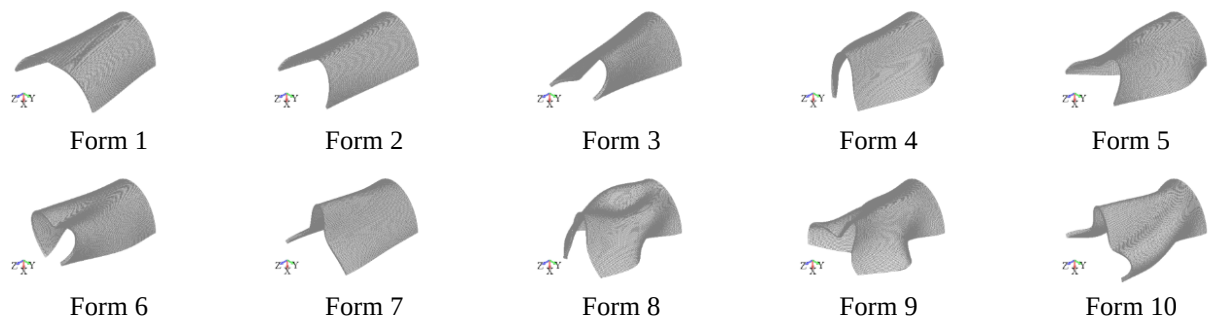


Рис. 7.40. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=90^0$ (OX) (CFFF) ($d_a < d_b$)

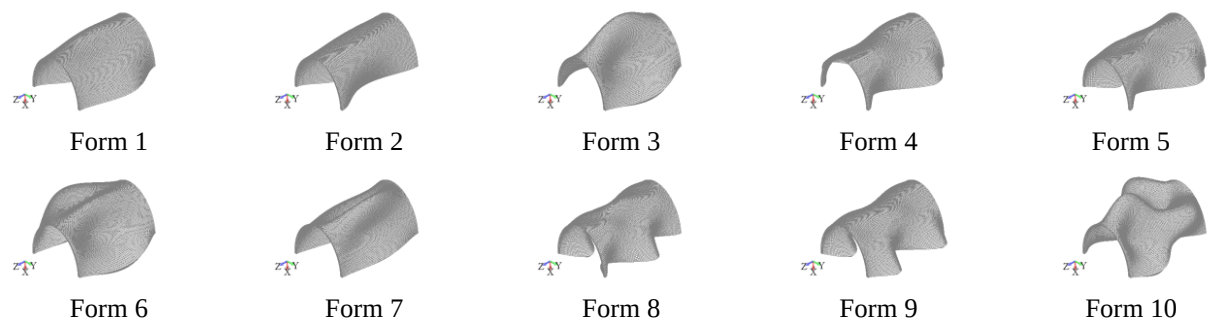


Рис. 7.41. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=90^0$ (OX) (CFCF) ($d_a < d_b$)

Форми вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$) зі значенням кута розкриття $\varphi=90^0$ (OY) з граничними умовами (CFFF) представлені на рис. 7.42, а з (CFCF) – на рис. 7.43.

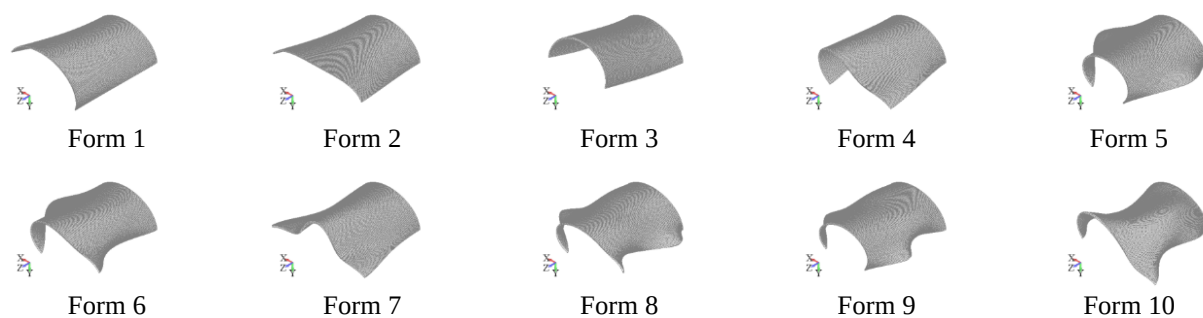


Рис. 7.42. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=90^0$ (OY) (CFFF) ($d_a < d_b$)

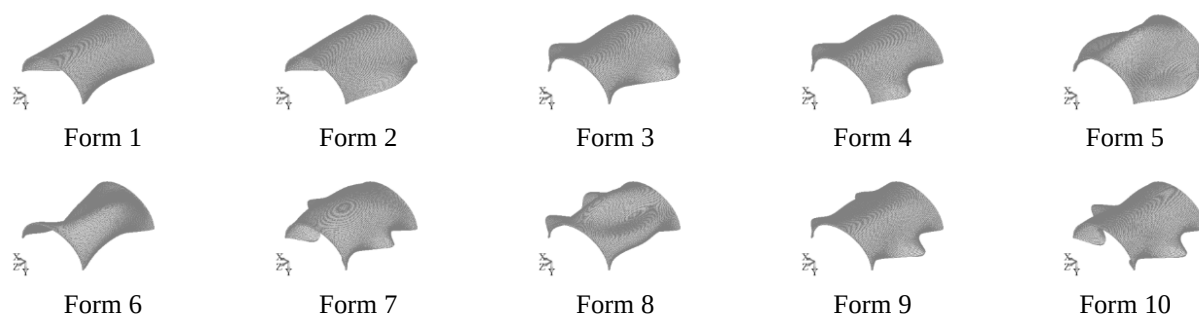


Рис. 7.43. Форми вільних коливань оболонки з кутом розкриття $\varphi=90^0$ (OY) (CFCE) ($d_a < d_b$)

Проведено розрахунки частот і форм вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки еліптичного перерізу зі значенням ексцентриситету $\varepsilon=0,7$ змінної товщини ($d_a > d_b$) (рис. 7.44) [290] з параметрами описаними в підпункті 7.3.1, товщина оболонки уздовж великої півосі $d_a=3\text{мм}$, уздовж малої півосі $d_b=1,3\text{мм}$. Оболонка розрізалась (розкривалась) на заданий кут 2φ в межах від 0^0 до 90^0 з кроком 10^0 .

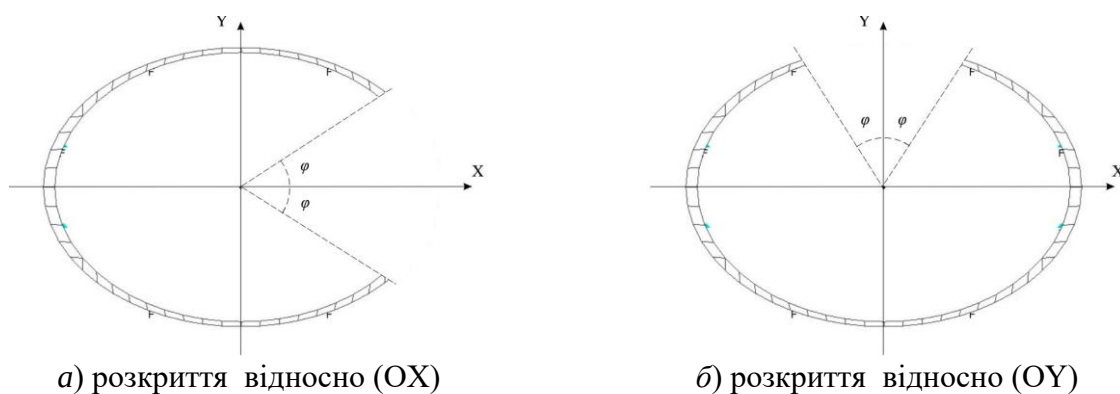


Рис. 7.44. Способи розкриття оболонки змінної товщини ($d_a > d_b$)

Перші десять частот вільних коливань, розрахованих для некругової циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a > d_b$) відкритої відносно великої півосі (ОХ) з граничними умовами (CFFF), в залежності від кута розкриття φ наведені в таблиці 7.27. Для порівняння наведені також частоти для замкнутої некругової циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a > d_b$) при відповідних граничних умовах. В таблиці 7.28 наведені перші десять частот вільних коливань некругової циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a > d_b$) розкритої відносно великої півосі (ОХ) з граничними умовами (CFCF), в залежності від кута розкриття φ .

Таблиця 7.27

Частоти вільних коливань некругової оболонки (ОХ) (CFFF) ($d_a > d_b$)

Form	Замк.	$f, \text{Гц}$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1	1724,56	768,48	673,95	604,25	563,77	557,98	589,81	615,13	660,24	734,06	820,09
2	1800,12	780,72	678,72	614,48	587,06	579,43	591,38	655,23	734,38	801,53	843,65
3	2128,07	1519,97	1494,69	1531,16	1471,85	1465,15	1523,42	1563,65	1533,82	1560,67	1715,44
4	2224,56	1711,67	1629,17	1532,65	1615,47	1622,60	1587,12	1586,29	1652,68	1758,80	1888,00
5	3238,23	2002,72	2047,16	2035,43	1834,56	1700,21	1676,74	1665,96	1670,82	1761,95	1924,42
6	3717,94	2386,31	2325,06	2053,81	1869,08	1817,74	1742,32	1802,50	2070,36	2464,18	2535,92
7	3795,95	2636,16	2394,66	2270,64	2118,48	2054,62	2264,72	2646,74	2986,99	2802,37	3062,87
8	3947,79	2762,78	2466,80	2277,36	2540,96	2887,20	3094,94	3007,42	2991,58	3093,36	3274,17
9	4397,91	2798,74	2705,78	3013,90	3458,58	3287,58	3097,49	3012,31	3032,17	3098,99	3294,05
10	4445,65	3298,40	3622,48	3891,54	3627,60	3291,44	3362,89	3247,31	3179,26	3877,00	4551,38

Таблиця 7.28

Частоти вільних коливань некругової оболонки (ОХ) (CFCF) ($d_a > d_b$)

Form	Замк.	$f, \text{Гц}$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1	3955,25	2400,82	2062,19	1778,27	1584,46	1457,91	1407,92	1411,29	1448,51	1536,41	1676,76
2	3980,40	2402,52	2063,27	1780,58	1584,85	1461,39	1412,53	1414,15	1466,51	1564,20	1683,06
3	4359,85	3862,73	3772,29	3618,15	3391,97	3045,21	2853,59	2761,07	2744,78	2831,20	2992,84
4	4388,92	3994,50	3785,18	3714,63	3392,23	3045,99	2853,72	2762,97	2747,70	2832,74	3006,92
5	5537,67	4249,95	4386,30	3879,74	3561,94	3492,12	3496,37	3627,26	3775,11	3902,73	4190,10
6	5615,01	4523,34	4410,99	3880,19	3602,44	3567,91	3652,77	3721,39	3894,58	4284,51	4555,56
7	6538,66	5217,84	4528,88	4290,86	4435,54	4673,85	4691,37	4497,52	4401,63	4463,19	4663,10
8	6542,13	5219,50	4529,18	4659,35	4770,29	4756,76	4713,07	4500,02	4402,87	4476,23	4683,63
9	6572,85	5229,48	5390,92	5365,40	5466,39	5093,05	4729,55	4985,23	5498,47	5425,66	5783,65
10	6573,63	5854,18	5632,61	5847,94	5722,95	5099,29	5301,89	5638,59	5558,76	6427,71	6657,63

В таблиці 7.29 наведені перші десять власних частот некругової циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$) розкритої відносно малої

півосі (OY) з граничними умовами (CFFF), в залежності від кута розкриття φ . В таблиці 7.30 наведені перші десять власних частот некругової циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a < d_b$) розкритої відносно малої півосі (OY) з граничними умовами (CFCF) в залежності від кута розкриття φ .

Таблиця 7.29

Частоти вільних коливань некругової оболонки (OY) (CFFF) ($d_a > d_b$)

Form	Замк.	$f, \text{Гц}$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1	1724,56	841,11	912,21	958,93	982,93	990,45	990,68	991,61	926,51	803,72	709,63
2	1800,12	849,48	915,43	990,37	1055,16	1098,31	1098,42	1036,98	993,75	961,31	825,80
3	2128,07	1637,49	1700,79	1824,91	1815,16	1765,76	1762,77	1838,22	1678,63	1510,59	1528,08
4	2224,56	1840,80	1941,65	1882,05	2007,73	2239,14	2157,03	1917,37	2002,40	2189,38	2011,38
5	3238,23	1896,47	2025,22	2240,87	2515,51	2388,75	2535,41	2872,00	2720,06	2526,35	2703,26
6	3717,94	1962,74	2053,95	2276,80	2531,80	2812,52	3069,50	2965,98	3185,91	3025,42	2752,90
7	3795,95	2041,82	2139,29	2392,76	2597,26	2841,94	3126,27	3230,76	3282,29	3188,79	2927,08
8	3947,79	2600,32	2856,74	2765,58	2724,93	3143,35	3192,24	3317,07	3402,82	3898,85	4338,49
9	4397,91	3085,27	2937,96	3214,02	3581,50	3409,83	3684,66	4298,44	4621,55	4375,73	4480,37
10	4445,65	3269,35	3494,91	3737,79	3658,98	4235,92	4540,18	4492,33	4709,77	4874,93	4757,19

Таблиця 7.30

Частоти вільних коливань некругової оболонки (OY) (CFFF) ($d_a > d_b$)

Form	Замк.	$f, \text{Гц}$									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1	3955,25	1679,30	1825,63	2028,11	2264,27	2512,73	2713,57	2820,64	2832,51	2628,02	2365,40
2	3980,40	1679,52	1826,13	2030,21	2267,24	2517,21	2745,90	2877,01	2834,53	2736,27	2436,24
3	4359,85	2996,56	3200,55	3517,44	3928,97	4142,62	4124,52	4100,19	4227,42	3958,70	3904,19
4	4388,92	2996,59	3200,57	3517,59	3929,29	4181,42	4281,75	4405,44	4251,55	4533,39	4343,09
5	5537,67	4022,81	4086,50	4076,12	4082,11	4449,90	5037,79	5493,37	5772,71	5355,69	5167,11
6	5615,01	4129,76	4097,37	4154,75	4195,79	4450,53	5045,66	5556,91	5810,66	5640,48	5275,45
7	6538,66	4338,19	4649,94	4893,01	5045,34	5335,15	5587,85	5570,70	5853,28	5733,10	5391,05
8	6542,13	4561,23	4748,72	5080,06	5590,57	5780,65	5838,79	6566,50	6080,12	6539,99	6568,89
9	6572,85	4657,74	4930,76	5367,05	5960,68	6352,23	6634,23	6653,27	6660,52	6634,76	6788,07
10	6573,63	4671,32	4935,49	5369,81	5962,76	6646,91	6683,73	6727,46	6833,54	6933,61	6930,94

Перші дві власні частоти замкнутої некругової циліндричної оболонки змінної товщини ($d_a > d_b$) жорстко закріпленої по одному торцю більші в 2,2-2,3 разу в порівнянні з відповідними частотами ідентичної оболонки з розрізом (OX) та в 2,1 разу в порівнянні з відповідними частотами ідентичної оболонки з розрізом (OY). При закріпленні двох торців перші дві власні частоти замкнутої некругової циліндричної оболонки більше в 1,7 разу відповідних частот некругової циліндричної оболонки з розрізом (OX) та в 2,4 разу відповідних частот некругової циліндричної оболонки з розрізом (OY).

Максимальне значення першої резонансної частоти спостерігається при куті відкритості розкриття 90° (OX) для оболонки (CFFF) та при 0° (OX) для оболонки (CFCF). Максимальне значення першої резонансної частоти спостерігається при куті відкритості розкриття 60° (OY) для оболонки (CFCF) та 70° (OY) для оболонки (CFCF).

Форми коливань для оболонок із різним характером зміни товщини ($d_a < d_b$ і $d_a > d_b$) з однаковим кутом розкриття та однаковими граничними умовами є однаковими, наприклад, на рис. 7.45 зображені форми коливань для обох оболонок з кутом розкриття $\varphi=90^\circ$ (OX) з граничними умовами (CFCF).

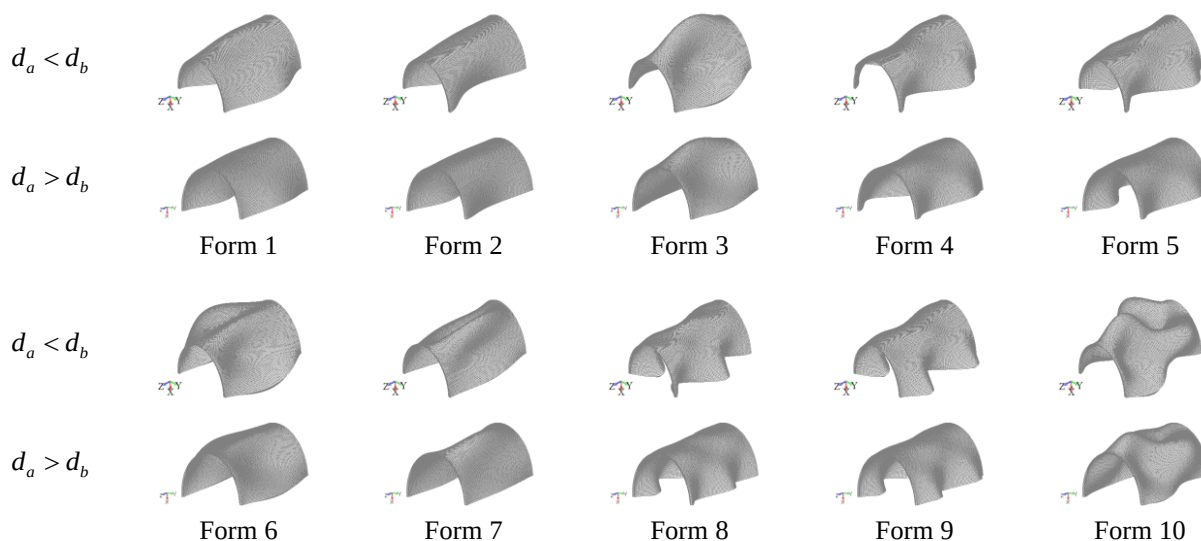


Рис. 7.45. Форми вільних коливань двох оболонок з кутом розкриття $\varphi=90^\circ$ (OX) (CFCF)

7.4. Розрахунок частот та форм вільних коливань циліндричних оболонок гофрованого поперечного перерізу

7.4.1. Розрахунок частот та форм вільних коливань циліндричних оболонок гофрованого поперечного перерізу з різною кількістю гофр

За допомогою системи FEMAP побудовано геометрію десяти еквівалентних по масі замкнутих гофрованих кругових циліндричних оболонок з різною кількістю гофрів по контуру (рис. 7.46) [291, 292] висотою $h=0,12$ м, товщиною $d=0,002$ м, серединною поверхнею, що описується параметричними рівняннями (7.1), де $r=0,002$ м, значення a , b при різних k наведені в таблиці 7.31. Як матеріал задавалась сталь з характеристиками:

модуль Юнга $E=214 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,32$, густина $\rho=7820 \text{ кг/м}^3$.

Оболонки досліджувались при жорстко (С) закріпленому одному торці.

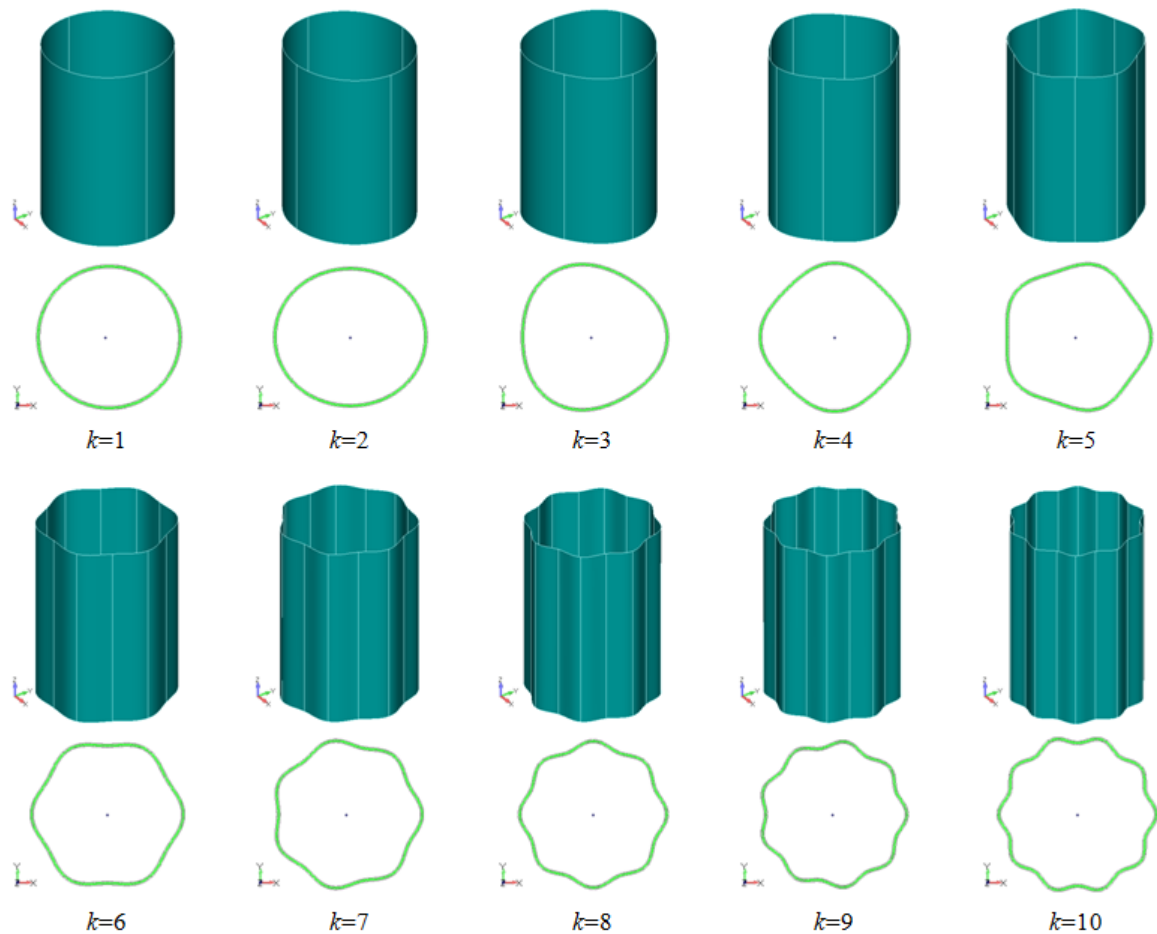


Рис. 7.46. Геометрія замкнутих гофрованих кругових циліндричних оболонок

Таблиця 7.31

Значення напіввісей базового еліпсу a, b при різних кількостях гофрів k

k	1	2	3	4	5
$a=b, \text{ м}$	0,041547	0,043455	0,043340	0,043179	0,042971
k	6	7	8	9	10
$a=b, \text{ м}$	0,042716	0,042414	0,042064	0,041665	0,041217

В результаті розрахунків отримано частоти і форми вільних коливань сталевих консольних замкнутих гофрованих кругових циліндричних оболонок. Частоти вільних коливань досліджуваних гофрованих циліндричних оболонок еквівалентної маси з $m=1$ представлені в таблиці 7.32, де m – кількість вузлів вздовж твірної, n – кількість вузлів вздовж дугової координати оболонки; $\text{Form } (m; n)$ – симетричні форми коливань;

Form (m' ; n') – несиметричні форми коливань. Симетричні та несиметричні форми коливань описані в літературі, наприклад, в [293, 294] вони отримані теоретично.

Криві залежності частот при відповідних симетричних (а) і несиметричних (б) формах коливань від кількості гофрів представлені на рис. 7.47.

Таблиця 7.32

Частоти вільних коливань гофрованих оболонок з різною кількістю гофрів k

Form		$f, \Gamma\text{ц}$				
m	n	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
1	2	3633,52	3565,30	3663,94	3817,38	3041,47
1'	2'	3636,61	3816,02	3663,92	3817,38	3041,48
1	4	1815,49	1809,03	1764,48	2197,84	1672,47
1'	4'	1815,35	1839,60	1764,49	1447,19	1672,47
1	6	2424,94	2247,68	2250,33	2104,68	2509,06
1'	6'	2424,94	2251,45	2191,30	2104,68	2509,05
1	8	4323,40	3953,15	3990,28	3631,37	4625,79
1'	8'	4323,40	3953,38	3990,29	3913,25	4625,79
1	10	6886,91	6285,77	6253,79	6103,60	5072,81
1'	10'	6887,10	6285,76	6253,78	6103,60	5926,92
1	12	10024,50	9148,11	9109,10	9008,85	8424,99
1'	12'	10024,73	9148,22	9113,79	10052,03	8425,01
Form		$f, \Gamma\text{ц}$				
m	n	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
1	2	3307,61	3361,60	3368,61	3357,64	3336,93
1'	2'	3307,61	3361,61	3368,61	3357,64	3336,94
1	4	1786,36	1798,94	1796,62	1789,80	1780,77
1'	4'	1786,34	1798,93	1796,62	1789,79	1780,78
1	6	2295,07	2345,73	2347,22	2356,65	2371,31
1'	6'	2412,21	2345,73	2347,21	2356,65	2371,30
1	8	4126,88	4123,40	3857,00	4083,29	4138,01
1'	8'	4126,87	4123,39	4360,93	4083,29	4138,00
1	10	6340,51	6287,41	6393,69	6530,70	6035,40
1'	10'	6340,52	6287,42	6393,69	6530,71	7066,81
1	12	6111,88	8073,83	8667,69	9029,40	9288,05
1'	12'	9355,50	8073,81	8667,70	9029,39	9288,05

Для порівняння форм коливань представлені симетричні форми $m=1$, $n=10$ на рис. 7.48 і $m=1$, $n=12$ на рис. 7.49, оскільки при цих формах коливань розбіжність частот при різній кількості гофрів максимальна.

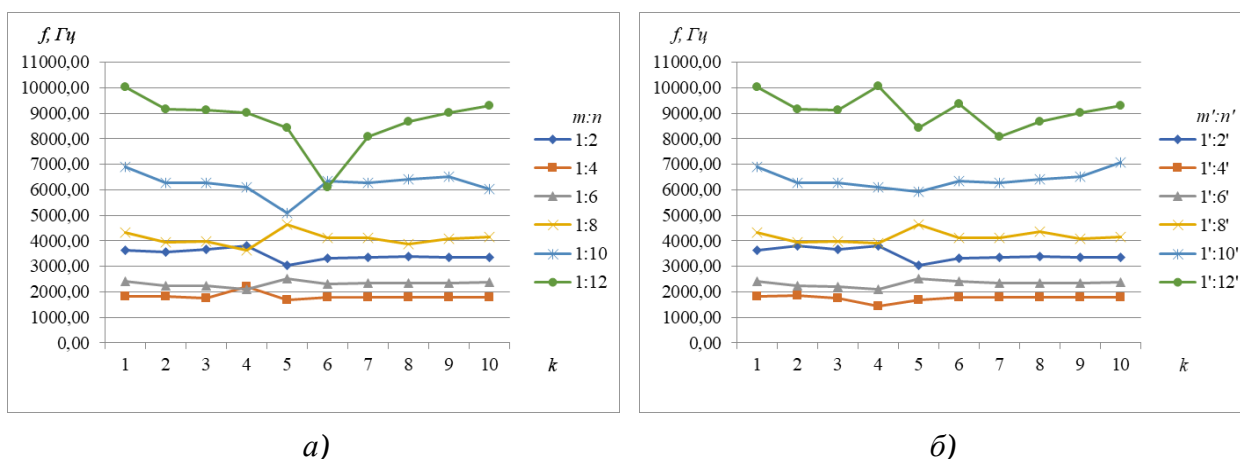


Рис. 7.47. Частоти вільних коливань гофрованих оболонок з різною кількістю гофрів k

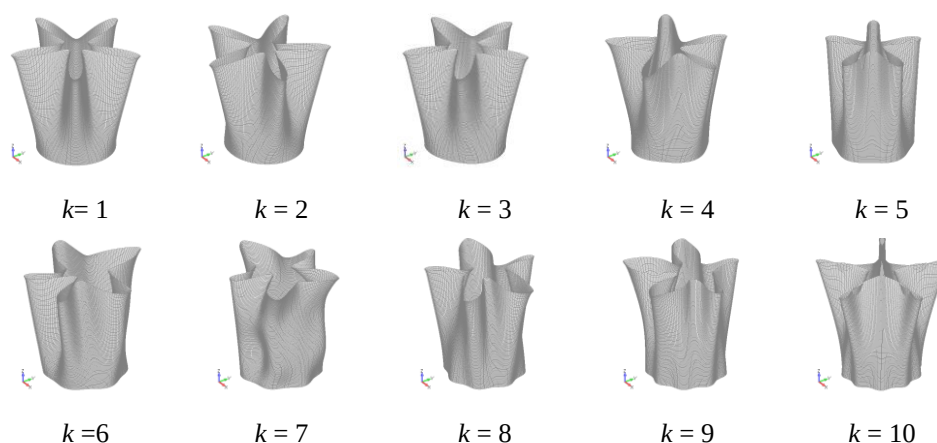


Рис. 7.48. Симетричні форми $m=1$, $n=10$ коливань оболонок з різною кількістю гофрів k

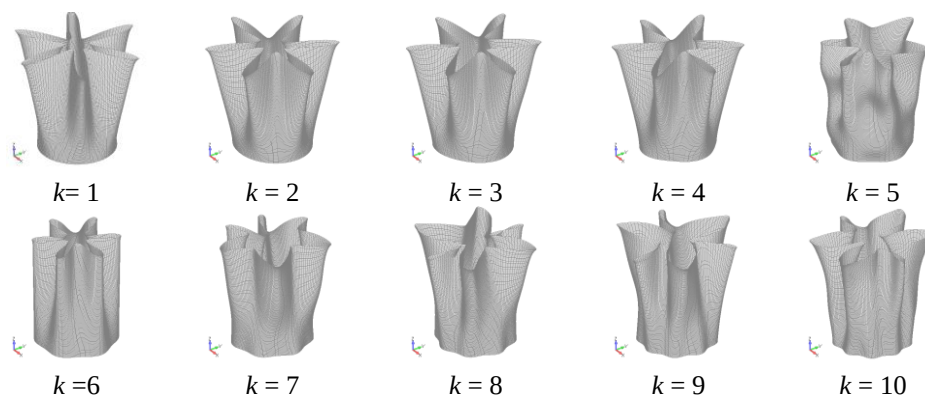


Рис. 7.49. Симетричні форми $m=1$, $n=12$ коливань оболонок з різною кількістю гофрів k

Порівняння деяких симетричних і несиметричних форм коливань представлені на рис. 7.50 для оболонок з різною кількістю гофрів k . Відмітимо, що поділ форм коливань на симетричні та несиметричні інколи формальний, оскільки не завжди спостерігається порушення симетрії форми. Можна спостерігати поворот коливань або поворот форми, при цьому глобальна зміна вигляду проекції форми на площину закріплення оболонки

може відбуватися чи не відбуватися, що залежить від конструктивної жорсткості оболонки і додає складностей при класифікації форм коливань. Таким чином, на формах рис. 7.50, *а)* спостерігається поворот форми із збереженням симетрії, на рис. 7.50, *б)* – поворот форми без збереження симетрії, на рис. 7.50, *в)* – зміна проекції форми з поворотом та збереженням симетрії.

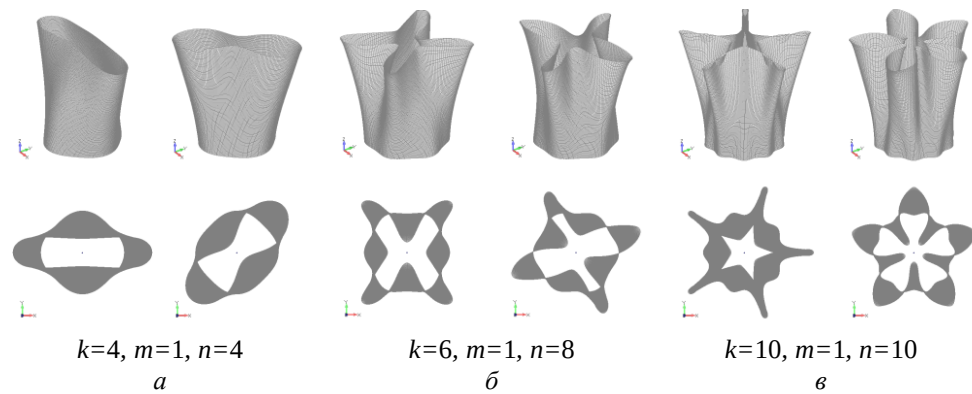


Рис. 7.50. Симетричні та несиметричні форми коливань

Частоти вільних коливань досліджуваних гофрованих циліндричних оболонок з кількістю вузлів вздовж твірної $m=2$ представлені в таблиці 7.33. Криві залежності частот при відповідній симетричній (*а)* і несиметричній (*б)*) формах коливань від кількості гофрів представлені на рис. 7.51.

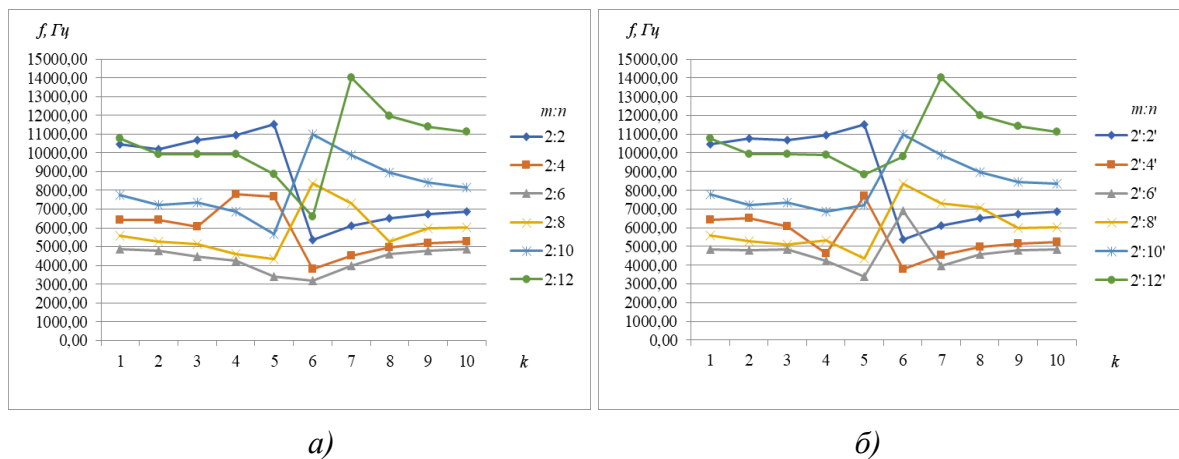


Рис. 7.51. Частоти вільних коливань гофрованих оболонок з різною кількістю гофрів k

Таблиця 7.33

Частоти вільних коливань гофрованих оболонок з різною кількістю гофрів k

Form	f , Гц
------	----------

m	n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
2	2	10463,60	10176,24	10668,04	10962,10	11522,82
2'	2'	10470,89	10762,39	10668,06	10962,10	11522,82
2	4	6420,54	6402,32	6085,10	7816,31	7680,70
2'	4'	6419,90	6531,67	6085,12	4640,95	7680,68
2	6	4852,27	4771,80	4449,82	4228,76	3408,97
2'	6'	4852,47	4791,16	4850,22	4228,76	3408,97
2	8	5581,95	5256,96	5116,23	4596,61	4356,76
2'	8'	5581,99	5264,34	5116,24	5306,30	4356,77
2	10	7770,17	7205,71	7349,18	6881,51	5660,99
2'	10'	7770,25	7205,84	7349,23	6881,51	7204,03
2	12	10788,65	9928,64	9909,22	9921,64	8857,55
2'	12'	10788,77	9928,68	9914,56	9877,19	8857,56
Form		f, Γ_{Π}				
m	n	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
2	2	5348,62	6104,46	6522,41	6737,03	6846,88
2'	2'	5348,60	6104,48	6522,42	6737,04	6846,93
2	4	3787,83	4533,08	4961,87	5163,63	5257,96
2'	4'	3787,81	4533,10	4961,83	5163,66	5258,01
2	6	3175,87	3974,01	4599,15	4797,12	4855,03
2'	6'	6888,34	3974,00	4599,15	4797,14	4855,04
2	8	8365,55	7292,37	5256,29	5965,42	6011,99
2'	8'	8365,52	7292,36	7100,83	5965,40	6012,02
2	10	10985,13	9903,77	8957,71	8442,78	8163,31
2'	10'	10985,23	9903,78	8957,70	8442,78	8352,94
2	12	6596,47	14031,10	11987,13	11417,89	11136,17
2'	12'	9786,47	14031,23	11987,12	11417,90	11136,16

Для порівняння форм коливань представлені симетричні форми $m=2$, $n=10$ на рис. 7.52 і $m=2$, $n=12$ на рис. 7.53, оскільки при цих формах коливань розбіжність частот при різній кількості гофрів максимальна.

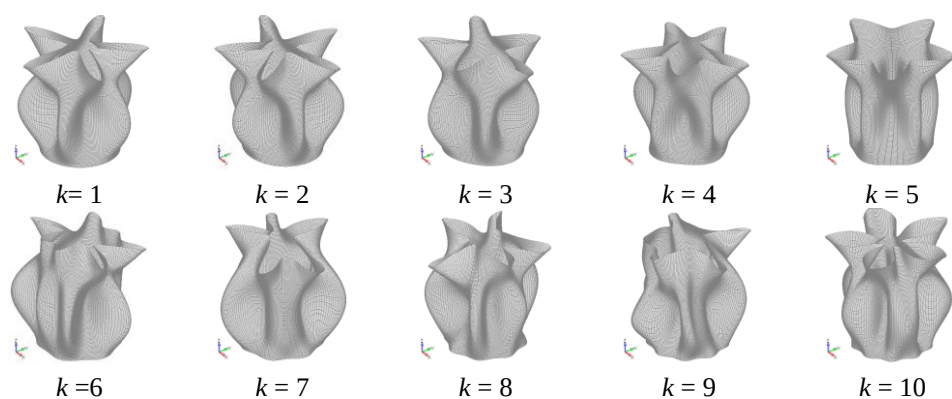
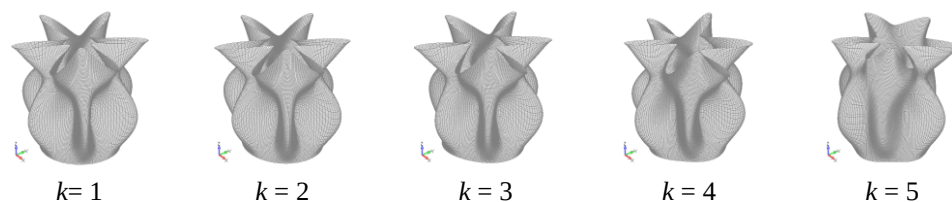


Рис. 7.52. Симетричні форми $m=2$, $n=10$ коливань оболонок з різною кількістю гофрів k



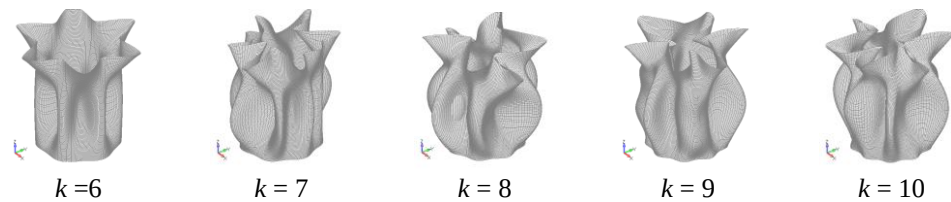


Рис. 7.53. Симетричні форми $m=2$, $n=12$ коливань оболонок з різною кількістю гофрів k

При розрахунку частот вільних коливань досліджуваних гофрованих оболонок було отримано частоти, наведені в таблиці 7.34, форми коливань яких відповідають деформаціям кручення (рис. 7.54), розтягу-стиску (рис. 7.55) та зсуву (рис. 7.56). При цьому тільки при зсувних коливаннях спостерігаються симетричні та несиметричні форми коливань.

Таблиця 7.34

Частоти вільних коливань кручення, розтягу-стиску та зсуву

Form	f , Гц				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
Кручення	6708,45	6708,59	6711,84	6738,60	—
Розтяг-стиск	10771,52	10748,01	10758,89	10810,42	10862,66
Зсув	15711,89	15820,94	15730,42	16197,54	17162,35
Зсув'	15725,23	16259,80	15730,44	16197,54	17162,38
Форма	f , Гц				
	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
Кручення	6456,06	6472,24	6441,02	6392,24	6332,08
Розтяг-стиск	10930,70	10988,13	10915,60	11006,41	11022,96
Зсув	12179,12	12349,77	12646,06	12789,03	12860,98
Зсув'	12179,12	12349,77	12646,06	12789,03	12861,01

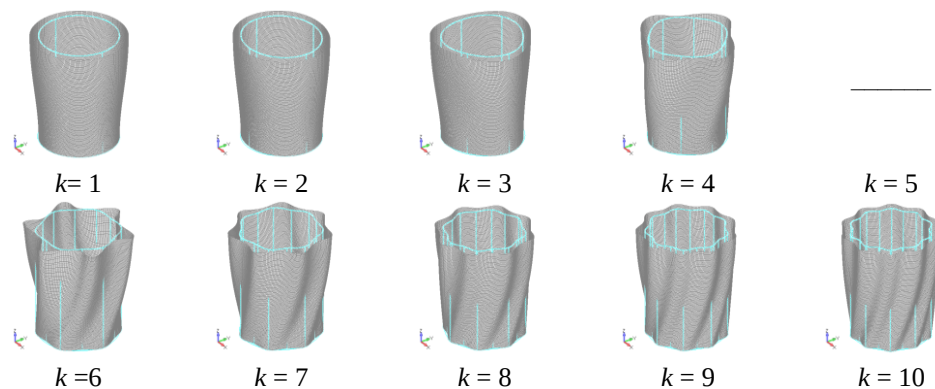
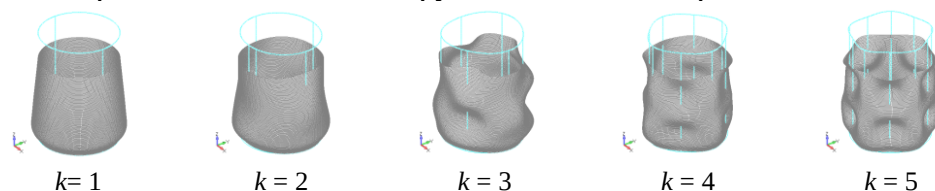


Рис. 7.54. Форми вільних коливань кручення оболонок з різною кількістю гофрів k



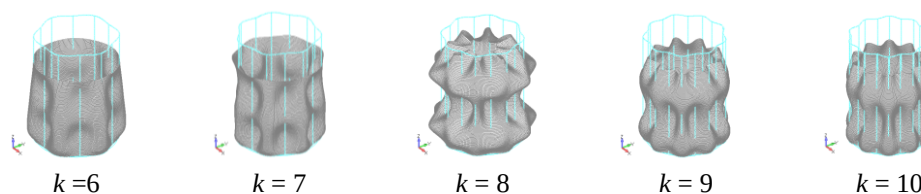


Рис. 7.55. Форми вільних коливань розтягу-стиску оболонок з різною кількістю гофрів k

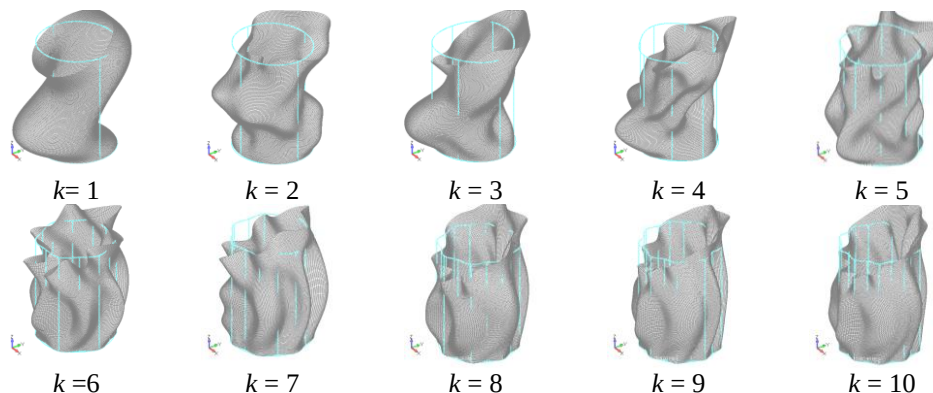


Рис. 7.56. Форми вільних коливань зсуву оболонок з різною кількістю гофрів k

Зміна частоти коливань розтягу-стиску та кручення із збільшенням кількості гофрів має монотонний характер. Для оболонки з кількістю гофрів $k=5$ відсутня частота і форма крутильних коливань. Зміна частоти зсувних коливань має значний стрибок при переході кількості гофрів від $k=5$ до $k=6$.

7.4.2. Розрахунок частот та форм вільних коливань замкнутої циліндричної оболонки гофрованого поперечного перерізу з різними граничними умовами з різних матеріалів

Досліджувалась замкнута циліндрична оболонка гофрованого поперечного перерізу з кількістю гофрів $k=8$ [295-297] та геометричними розмірами відповідно підпункту 7.4.1. Фізико-механічні характеристики матеріалу оболонки задавались величинами з таблиці 7.35. Оболонки досліджувалась при різних варіантах жорстко закріплених (C) і вільних (F) торців.

В результаті розрахунків отримано частоти і форми вільних коливань замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з різними граничними умовами та з різних матеріалів.

Фізико-механічні характеристики матеріалу гофрованої оболонки $k=8$

	Алюміній	Сталь	Мідь	Латунь	Титан	Поліетилен	Гума
$E, Гпа$	71	214	110	95	112	2,56	0,003
V	0,33	0,32	0,35	0,35	0,32	0,32	0,49
$\rho, кг/м^3$	2710	7820	8920	8730	4506	936	1200

Частоти вільних коливань сталеві гофрованої оболонки та негофрованої кругової циліндричної оболонки з різними граничними умовами на торцях представлені в таблиці 7.36 та на гістограмах (рис. 7.57), де m – кількість вузлів вздовж твірної, n – кількість вузлів вздовж дугової координати оболонки.

Порівняння частот вільних коливань сталеві гофрованої оболонки при різних варіаціях закріплення торців представлені на гістограмах (рис. 7.57 з).

Таблиця 7.36

Частоти вільних коливань сталеві гофрованої оболонки з різними граничними умовами на торцях

Form		$f, Гц$					
		(FF)		(FC)		(CC)	
m	n	k=0	k=8	k=0	k=8	k=0	k=8
1	4	716	735	1836	1797	5587	4529
1	6	2022	2061	2266	2347	4365	4251
1	8	3867	3627	3977	4361	4970	4906
1	10	6231	6248	6318	6394	7065	8462
1	12	9074	8462	9155	8668	9876	11530
2	4	852	874	6476	4962	10600	6852
2	6	2222	2259	4812	4599	8172	6501
2	8	4092	3791	5302	5256	7668	6618
2	10	6465	6391	7231	8958	8939	14093
2	12	9309	8178	9935	11987	11333	17507

При збільшені кількості жорсткого закріплення торців гофрованої оболонки частоти значно зростають, особливо це спостерігається при $m=1$. При вільних торцях гофрованої оболонки частоти при нижчих частотах відрізняються незначно в порівнянні з негофрованою оболонкою і менші при вищих частотах. При жорстко закріпленому одному торці і вільному іншому торці гофрованої оболонки частоти при нижчих частотах відрізняються незначно в порівнянні з негофрованою оболонкою і більші при вищих частотах. При жорстко закріплених обох торцях гофрованої оболонки

частоти при нижчих частотах значно менші в порівнянні з негофрованою оболонкою і значно більші при вищих частотах.

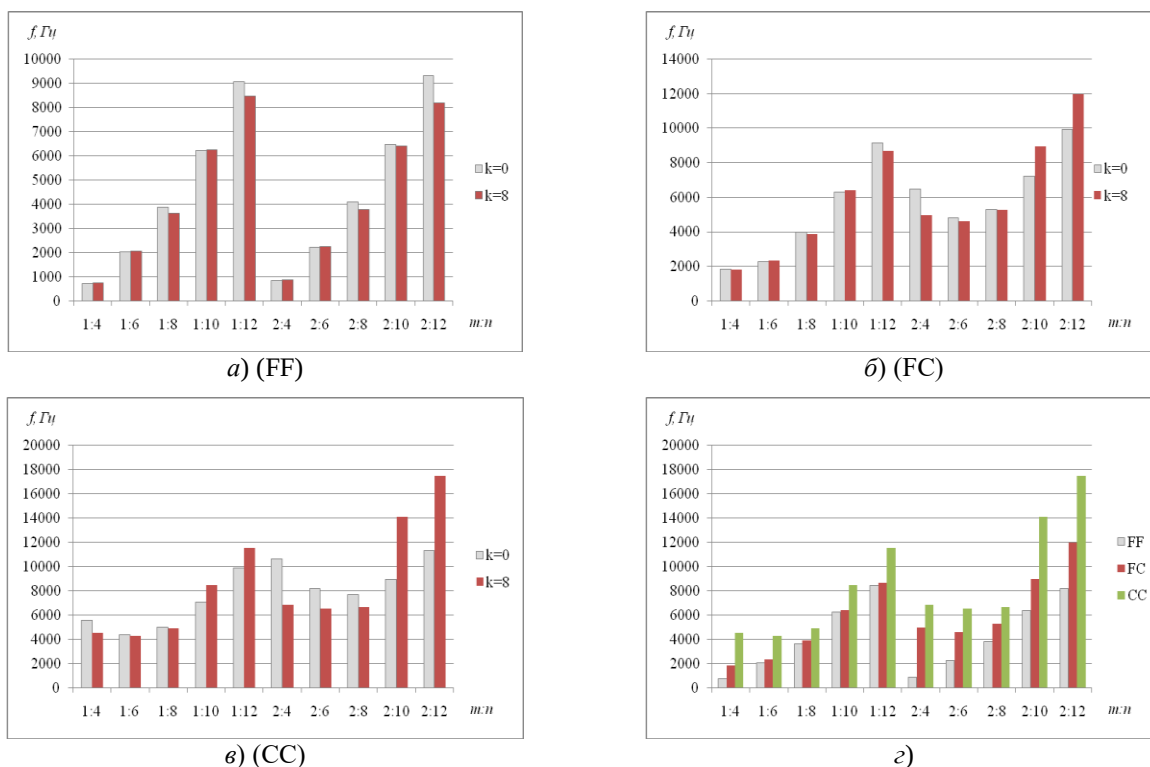


Рис. 7.57. Частоти вільних коливань гофрованої оболонки з різними граничними умовами

Форми коливань замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з двома вільними торцями (FF) представлені на рис. 7.58.

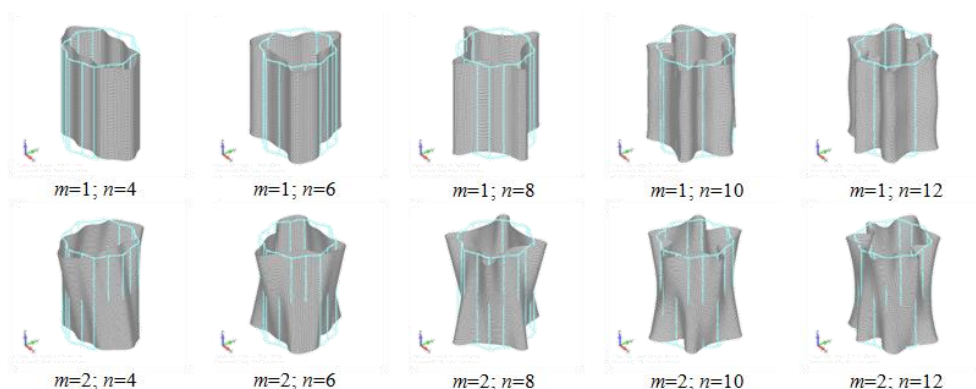


Рис. 7.58. Форми коливань замкнутої гофрованої оболонки (FF)

Спостерігаються симетричні та несиметричні форми коливань для всіх розглянутих форм коливань. Особливістю для таких форм є розбіжність між частотами, яка не перевищує 2 Гц , окрім форм коливань $m=1; n=8$ та $m=2; n=8$ гофрованої оболонки (рис. 7.59), відхилення між частотами симетричної

і несиметричної форм яких складає до 20%.

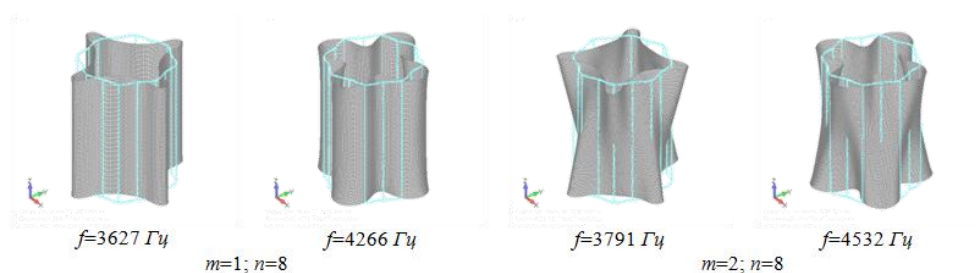


Рис. 7.59. Симетричні та несиметричні форми коливань гофрованої оболонки (FF)

Форми коливань замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з одним жорстко закріпленим та іншим вільним торцем (FC) представлені на рис. 7.60.

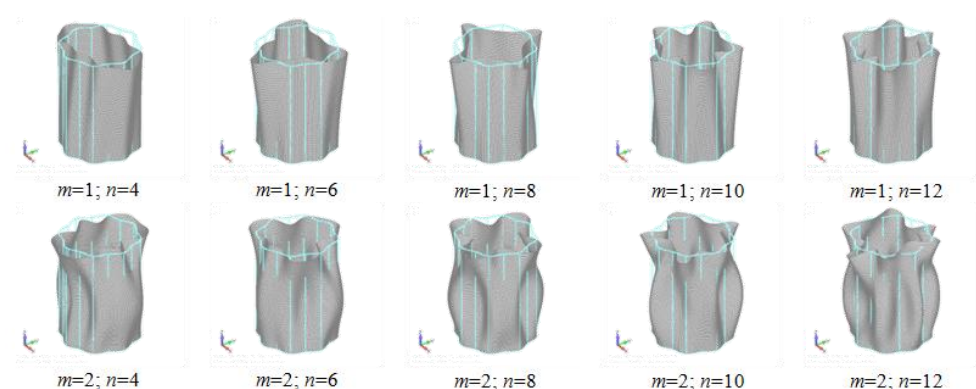


Рис. 7.60. Форми коливань замкнутої гофрованої оболонки (FC)

Для оболонок з закріпленням (FC) спостерігаються симетричні і несиметричні форми коливань, розбіжність між частотами яких не перевищує 1%, окрім форм коливань $m=1; n=8$ та $m=2; n=8$ гофрованої оболонки (рис. 7.31), відхилення між частотами яких складає до 36%.

Форми коливань замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з двома жорстко закріпленими торцями (CC) представлені на рис. 7.62.

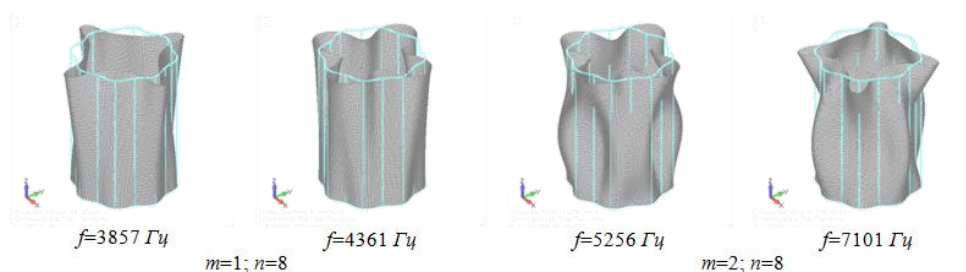


Рис. 7.61. Симетричні та несиметричні форми коливань гофрованої оболонки (FC)

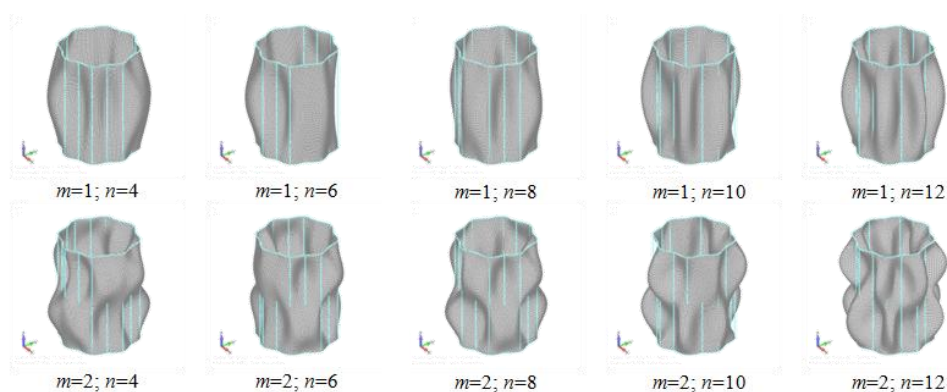


Рис. 7.62. Форми коливань замкнутої гофрованої оболонки (CC)

Для оболонок із закріпленням (CC) спостерігаються симетричні і несиметричні форми коливань, розбіжність між частотами не перевищує 3%, окрім форм коливань $m=1; n=8$ та $m=2; n=8$ гофрованої оболонки (рис. 7.63), відхилення між частотами яких складає до 91%.

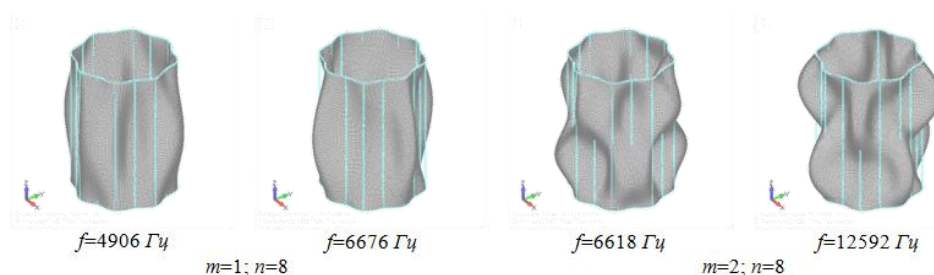


Рис. 7.63. Симетричні та несиметричні форми коливань гофрованої оболонки (CC)

Для всіх розглянутих гофрованих оболонок встановлені симетричні і несиметричні форми коливань, розбіжність між частотами яких не перевищує $max=3\%$, окрім форм коливань $m=1; n=8$ та $m=2; n=8$ гофрованої оболонки, відхилення між частотами яких складає $max=91\%$, при цьому із збільшенням кількості жорстко закріплених торців розбіжність між частотами зростає.

Частоти вільних коливань гофрованої оболонки з граничними умовами

(FC) з семи різних матеріалів представлені в таблиці 7.37, де наведені коефіцієнти $\mu_{i.m.}$, що є відношенням частоти оболонки з будь-якого ізотропного матеріалу до частоти оболонки зі сталі $\mu_{i.m.} = f_{i.m.} / f_{ст.}$, таке саме відношення використовується в розділі 3 для ізотропних пласти.

В таблиці 7.38 наведені коефіцієнти $\mu_{i.m.}^*$, що є коренем квадратним відношення фізико-механічних характеристик конкретного матеріалу до фізико-механічних характеристик сталі

$$\mu_{i.m.}^* = \sqrt{\frac{E_{i.m.}}{E_{ст.}} \frac{\rho_{ст.}}{\rho_{i.m.}} \frac{(1-\nu_{ст.}^2)}{(1-\nu_{i.m.}^2)}}. \quad (7.2)$$

Таблиця 7.37

Частоти вільних коливань гофрованої оболонки з різних матеріалів

m	n	f, Гц, (FC)							$\mu_{i.m.} = f_{i.m.} / f_{ст.}$					
		Ал.	Ст.	Мідь	Лат.	Тит.	Пол.	Гума	$\mu_{a.}$	$\mu_{м.}$	$\mu_{л.}$	$\mu_{т.}$	$\mu_{н.}$	$\mu_{с.}$
1	4	1758	1797	1206	1133	1712	568	17	0,98	0,67	0,63	0,95	0,32	0,01
1	6	2301	2347	1586	1490	2237	742	24	0,98	0,68	0,63	0,95	0,32	0,01
1	8	3783	3857	2610	2452	3676	1219	39	0,98	0,68	0,64	0,95	0,32	0,01
1	10	6272	6394	4326	4063	6093	2021	65	0,98	0,68	0,64	0,95	0,32	0,01
1	12	8503	8668	5867	5511	8261	2740	88	0,98	0,68	0,64	0,95	0,32	0,01
2	4	4861	4962	3343	3140	4729	1569	49	0,98	0,67	0,63	0,95	0,32	0,01
2	6	4507	4599	3102	2914	4383	1454	46	0,98	0,67	0,63	0,95	0,32	0,01
2	8	5156	5256	3555	3340	5009	1662	53	0,98	0,68	0,64	0,95	0,32	0,01
2	10	8773	8958	6031	5665	8537	2832	88	0,98	0,67	0,63	0,95	0,32	0,01
2	12	11734	11987	8058	7570	11424	3790	117	0,98	0,67	0,63	0,95	0,32	0,01

Таблиця 7.38

Коефіцієнти $\mu_{i.m.}^*$

$\mu_{a.}^*$	$\mu_{м.}^*$	$\mu_{л.}^*$	$\mu_{т.}^*$	$\mu_{н.}^*$	$\mu_{с.}^*$
0,98	0,68	0,64	0,95	0,32	0,01

Отримані коефіцієнти $\mu_{i.m.}$, а також розраховані коефіцієнти $\mu_{i.m.}^*$ є ідентичними, що свідчить про правильність розрахунків, вони встановлюють залежність частоти вільних коливань від фізико-механічних характеристик матеріалу.

7.4.3. Розрахунок частот та форм вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки гофрованого поперечного перерізу з різними граничними умовами

Досліджувалась гофрована замкнута циліндрична оболонка з кількістю гофрів $k=8$ [298] та геометричними розмірами відповідно підпункту 7.4.1. Ділі оболонка розрізалась навпіл на тах-ах (рис. 7.64 а), серединах(або 0) (рис. 7.64 б) або тін-ах (рис. 7.64 в) хвиль гофр. Як матеріал задавалась сталь з характеристиками з таблиці 7.35. Оболонки досліджувалась при різних варіантах жорстко закріплених (C) і вільних країв (F) (рис. 7.65).

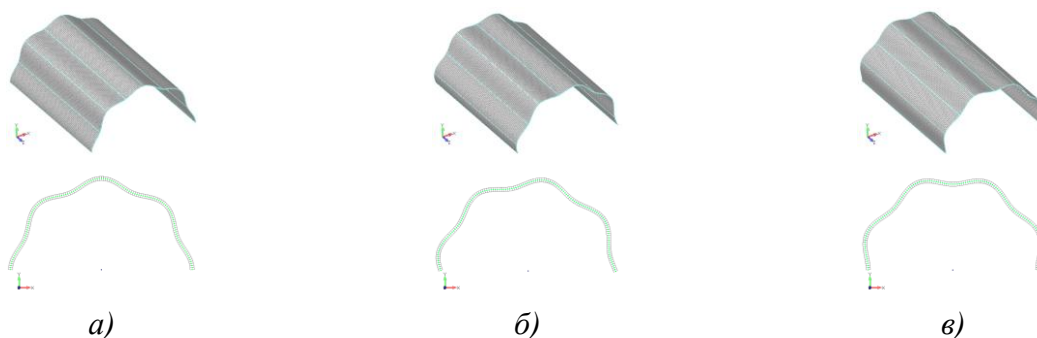


Рис. 7.64. Скінченно-елементні моделі гофрованих незамкнутих оболонок з різними способами повздовжнього розрізання навпіл

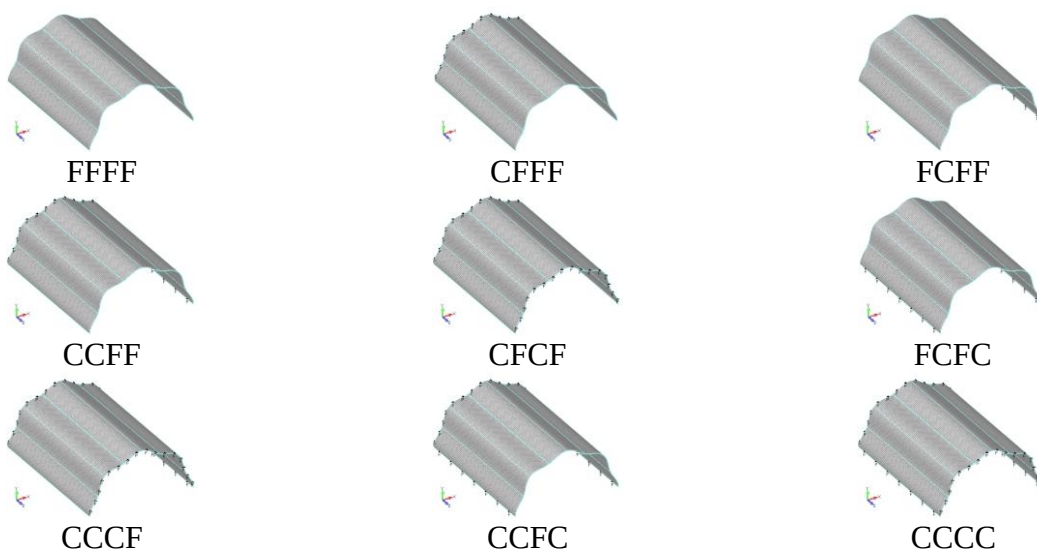


Рис. 7.65. Граничні умови гофрованих незамкнутих оболонок

В результаті розрахунків отримано частоти і форми вільних коливань сталевих кругових гофрованих незамкнутих циліндричних оболонок з різним способом повздовжнього розрізання навпіл та кількістю гофрів $k=8$ при всіх

вільних торцях та всіх жорстко закріплених торцях. Перші десять частот вільних коливань трьох досліджуваних гофрованих оболонок еквівалентної маси представлені в таблиці 7.39, де ε – розбіжність між частотами у відсотках.

Таблиця 7.39

Частоти вільних коливань гофрованих незамкнених циліндричних оболонок з різним способом повздовжнього розрізання навіпіл

Form	(FFFF)			ε_0 , %	ε_{min} , %	(CCCC)			ε_0 , %	ε_{min} , %
	max	0	min			max	0	min		
1	428	429	430	0,23	0,47	5050	4801	4764	4,93	5,66
2	502	503	506	0,20	0,80	5193	5136	5123	1,10	1,35
3	842	849	852	0,83	1,19	6650	6668	6647	0,27	0,05
4	1430	1444	1463	0,98	2,31	6833	6705	6700	1,87	1,95
5	1771	1799	1821	1,58	2,82	7344	7205	7175	1,89	2,30
6	2087	2708	3146	29,76	50,74	7462	8105	8043	8,62	7,79
7	2154	2798	3518	29,90	63,32	8660	8195	8150	5,37	5,89
8	2868	2981	3846	3,94	34,10	8861	9279	9271	4,72	4,63
9	3113	3280	3921	5,36	25,96	9343	9732	9685	4,16	3,66
10	3786	4570	4577	20,71	20,89	9623	10312	10325	7,16	7,30

Аналізуючи дані таблиці 7.39 можна побачити, що для оболонок з граничними умовами (FFFF) перші п'ять частот для оболонок з різним способом розрізання мають малу розбіжність в порівнянні з наступними п'ятьма частотами. Починаючи з шостої форми коливань (рис. 7.66, 7.67) проявляється різна конструктивна жорсткість, що обумовлює різне формоутворення, тобто одному і тому ж номеру форми відповідають різні форми коливань або дещо спотворенні форми коливань.

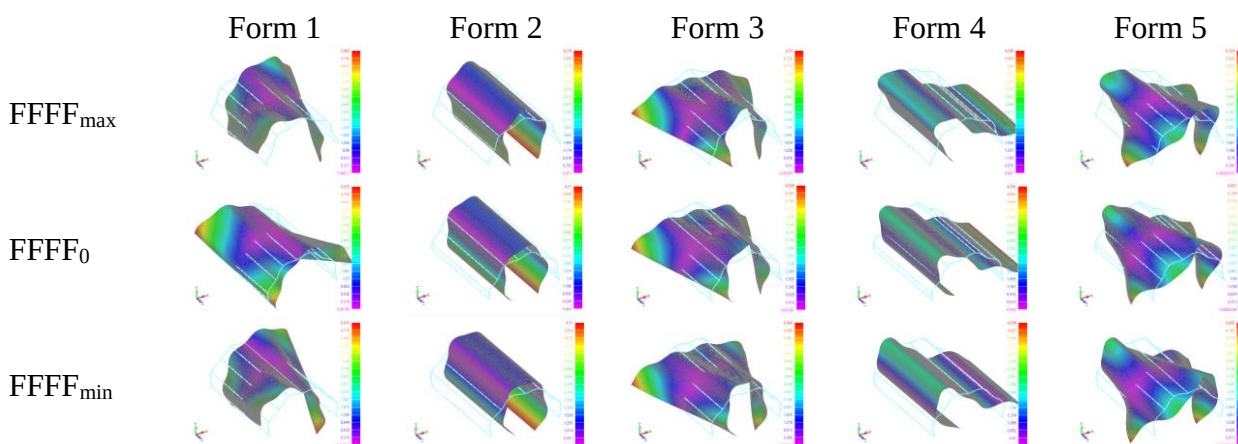


Рис. 7.66. Форми вільних коливань гофрованих незамкнених циліндричних оболонок з різним способом повздовжнього розрізання навіпіл (FFFF)

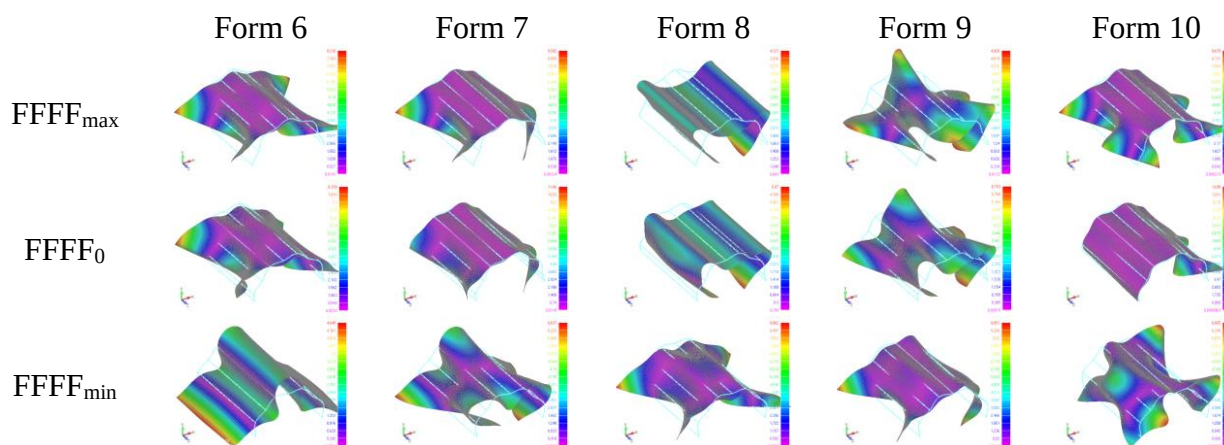


Рис. 7.67. Форми вільних коливань гофрованих незамкнутих циліндричних оболонок з різним способом повздовжнього розрізання навпіл (FFFF)

Для оболонок з граничними умовами (CCCC) перші десять частот мають розбіжність, що не перевищує 9%, при цьому спостерігається більша подібність форм коливань для оболонок з розрізанням по $\sin$ -ах та серединах хвилі гофрів (рис. 7.68, 7.69).

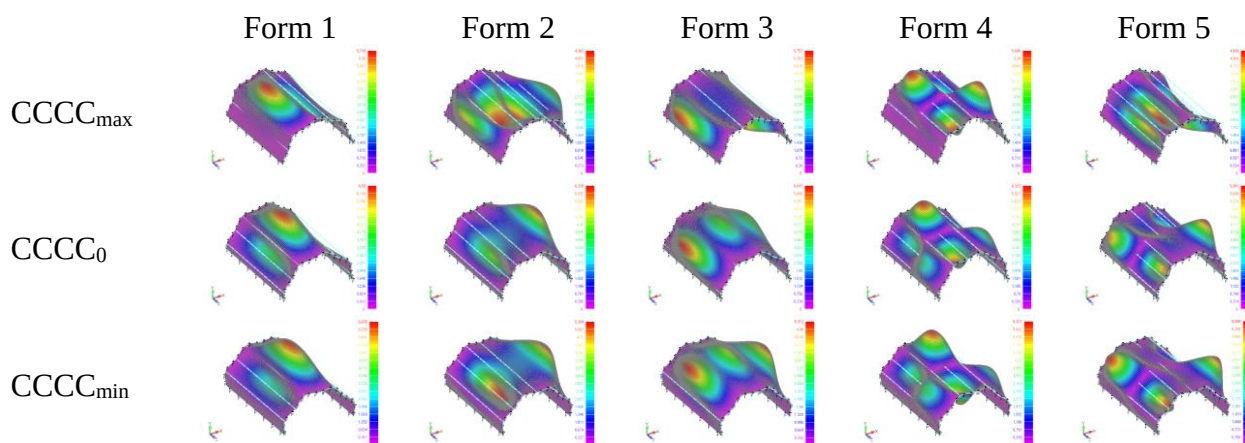


Рис. 7.68. Форми вільних коливань гофрованих незамкнутих циліндричних оболонок з різним способом повздовжнього розрізання навпіл (CCCC)

Встановлено залежність частоти вільних коливань від варіанту повздовжнього розрізання оболонки, наприклад, для оболонок з граничними умовами (FFFF) перші п'ять частот мають малу розбіжність в порівнянні з наступними п'ятьма частотами, яка досягає майже 65%, що зумовлено різною конструктивною жорсткістю при різному способі розрізання оболонки, яка добре спостерігається на різних формоутвореннях, починаючи з шостої форми коливань, тобто одному і тому ж номеру форми відповідають

різні форми коливань, або дещо спотворенні форми коливань. Для оболонок з граничними умовами (CCCC) перші десять частот мають розбіжність, що не перевищує 9%, при цьому спостерігається менша розбіжність та однаковість форм коливань для оболонок з розрізанням по $\sin$ -ах та серединах хвиль гофр.

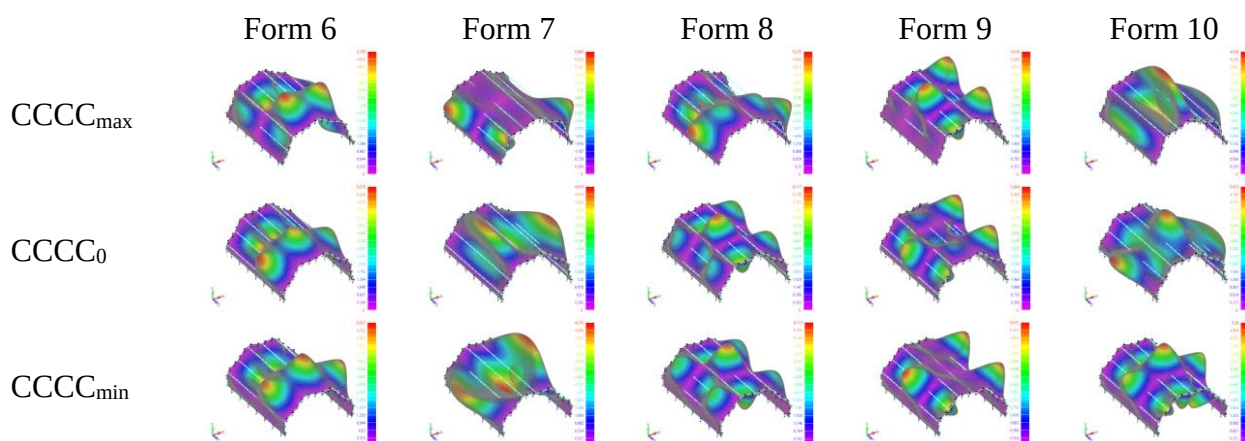


Рис. 7.69. Форми вільних коливань гофрованих незамкнутих циліндричних оболонок з різним способом повздовжнього розрізання навпіл (CCCC)

Далі розраховувались частоти та форми вільних коливань сталевій круговій гофрованої ($k=8$) незамкнутої циліндричної оболонки розрізаної навпіл по $\sin$ -ах хвиль гофрів з різними варіаціями жорсткого закріплення (рис. 7.65). Перші десять частот вільних коливань розглядуваної гофрованої оболонки при дев'яти різних граничних умовах представлені в таблиці 7.40.

Таблиця 7.40

Частоти вільних коливань гофрованої оболонки з різними варіаціями жорсткого закріплення

Form	FFFF	CFFF	FCFF	CCFF	CFCF	FCFC	CCCF	CCFC	CCCC
1	428	709	120	756	1549	1183	1572	2948	5050
2	502	752	216	1822	1595	2538	3250	3300	5193
3	842	1770	375	2024	3244	2612	4674	5421	6650
4	1430	1815	506	2961	3257	4295	5235	5490	6833
5	1771	1968	1269	3521	4442	5229	5642	5561	7344
6	2087	2226	1359	3991	5266	5680	6567	6853	7462
7	2154	3138	2120	5073	5638	5834	6745	7034	8660
8	2868	3520	2741	5449	5643	6039	6877	7288	8861
9	3113	3528	2860	5629	6128	6810	7460	7491	9343
10	3786	4558	3791	5897	6671	6889	8697	7826	9623

Перші п'ять форм вільних коливань гофрованої оболонки з різними варіаціями жорсткого закріплення представлені на рисунках 7.70-7.72, окрім випадків всіх вільних країв і жорсткого закріплення по всіх краях, які представлені на рис. 7.66 і 7.68 з індексами тах відповідно.

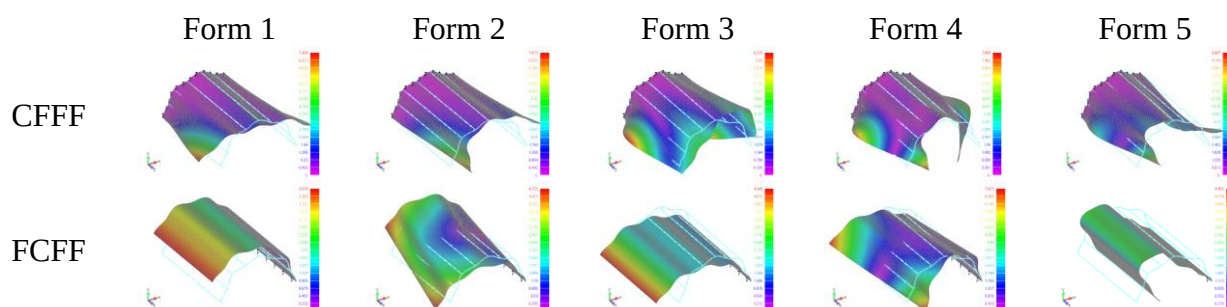


Рис. 7.70. Форми вільних коливань гофрованої незамкнутої циліндричної оболонки з одним жорстко закріпленим краєм та трьома вільними краями

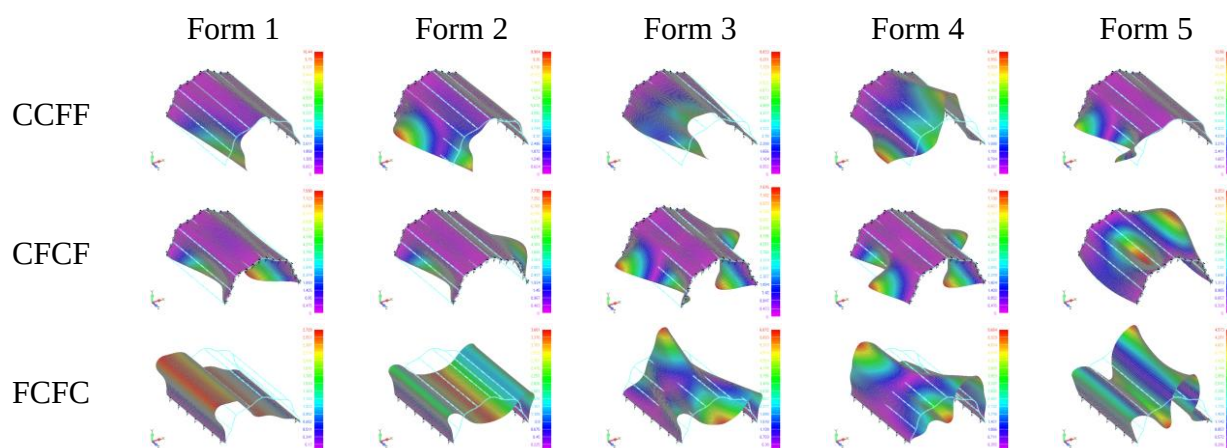


Рис. 7.71. Форми вільних коливань гофрованої незамкнутої циліндричної оболонки з двома жорстко закріпленими краями та двома вільними краями

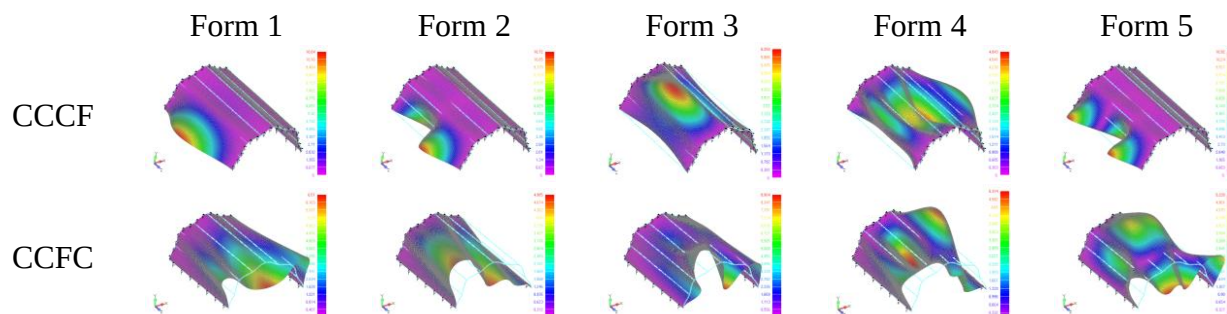


Рис. 7.72. Форми вільних коливань гофрованої незамкнутої циліндричної оболонки з трьома жорстко закріпленими краями та одним вільним краєм

Для гофрованої незамкнутої циліндричної оболонки розрізаної навпіл по

тах-ах при всіх способах граничних умов розраховано перші десять частот вільних коливань. Величина частот збільшується із збільшенням кількості жорстко закріплених торців, окрім варіанту закріплення FCFF. Наведені перші п'ять форм коливань.

Досліджувалась гофрована оболонка з кількістю гофрів $k=8$, яка розрізалась по тах-ах гофрів двома взаємно перпендикулярними півплощинами, побудованими від осі симетрії оболонки (рис. 7.73 а) [299]. Як матеріал задавалась сталь. Оболонка досліджувалась при різних варіантах жорстко закріплених (C) і вільних торців (F) (рис. 7.73 б).

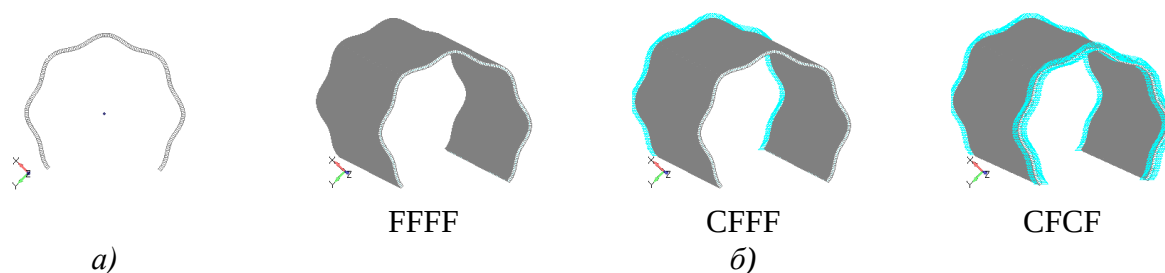


Рис. 7.73. Скінченно-елементна модель гофрованої оболонки з кутом розкриття $\varphi=90^\circ$

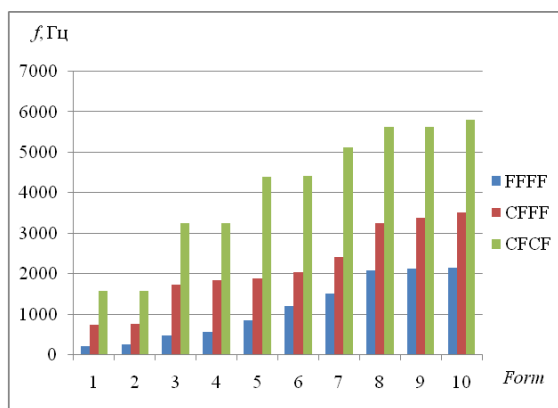
В результаті розрахунків отримано частоти і форми вільних коливань сталевій круглій гофрованої незамкнutoї циліндричної оболонки з кількістю гофрів $k=8$ при різних варіантах вільного та жорсткого закріплення торців. Перші десять частот вільних коливань досліджуваної гофрованої оболонки з кутом розкриття $\varphi=90^\circ$ з різними способами закріплення представлені в таблиці 7.41 та на гістограмах (рис. 7.74), де для порівняння представлені частотами для гофрованої оболонки з кутом розкриття $\varphi=180^\circ$ (з таблиці 7.40) та замкнутої оболонки (з таблиці 7.36) з однаковими геометричними, фізико-механічними параметрами та граничними умовами.

Аналізуючи дані гістограми (рис. 7.74 а) можна побачити однакову тенденцію зростання частот для всіх розглянутих граничних умов, при жорсткому закріпленні одного торця оболонки перша частота більша в 3,5 разу, а при закріпленні двох торців більша в 7,6 разу у порівнянні з частотами оболонки з вільними краями.

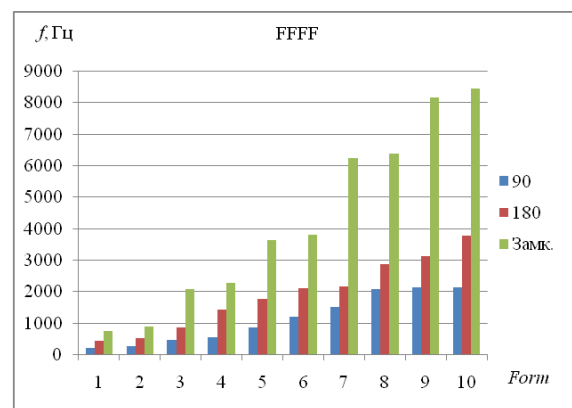
Таблиця 7.41

Частоти вільних коливань гофрованих незамкнутих та замкнутої оболонки

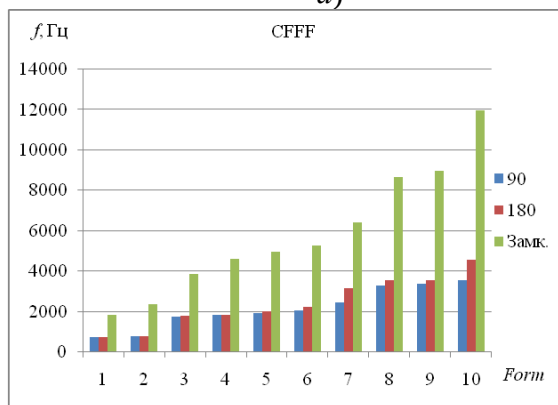
Form	$f, \text{Гц}$								
	FFFF			CFFF			CFCF		
	$\varphi=90^\circ$	$\varphi=180^\circ$	Замк.	$\varphi=90^\circ$	$\varphi=180^\circ$	Замк.	$\varphi=90^\circ$	$\varphi=180^\circ$	Замк.
1	208	428	735	726	709	1797	1572	1549	4251
2	252	502	874	751	752	2347	1572	1595	4529
3	460	842	2061	1714	1770	3857	3250	3244	4906
4	546	1430	2259	1830	1815	4599	3250	3257	6501
5	842	1771	3627	1883	1968	4962	4401	4442	6618
6	1195	2087	3791	2026	2226	5256	4413	5266	6852
7	1494	2154	6248	2415	3138	6394	5131	5638	8462
8	2083	2868	6391	3257	3520	8668	5636	5643	11530
9	2121	3113	8178	3370	3528	8958	5641	6128	14093
10	2133	3786	8462	3519	4558	11987	5816	6671	17507



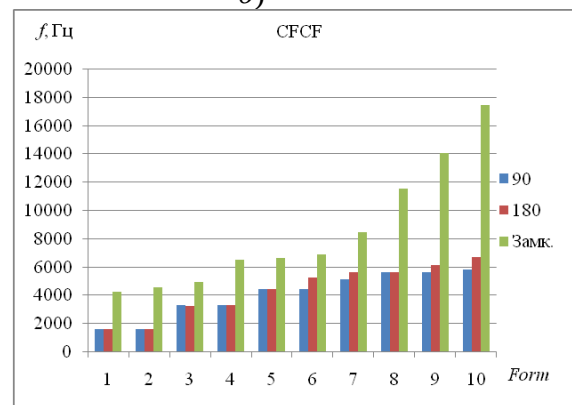
а)



б)



в)



г)

Рис. 7.74. Порівняння частот вільних коливань гофрованих незамкнутих та замкнутої оболонки

Аналізуючи дані таблиці 7.41, можна спостерігати близькість значень частот при жорстко закріпленому одному та двох торцях для незамкнутих оболонки; збільшення частоти в середньому в 1,8 разу для незамкнутої оболонки з кутом розкриття $\varphi=180^\circ$ в порівнянні з частотами для оболонки з

кутом розкриття $\varphi=90^\circ$ при вільних торцях; збільшення частоти в 1,5 і більше для замкнутої оболонки в порівнянні з частотами для оболонки з кутом розкриття $\varphi=90^\circ$ при всіх видах граничних умов.

Перші десять форм вільних коливань незамкнутої оболонки $\varphi=90^\circ$ при всіх видах граничних умов представлені на рисунку 7.75.

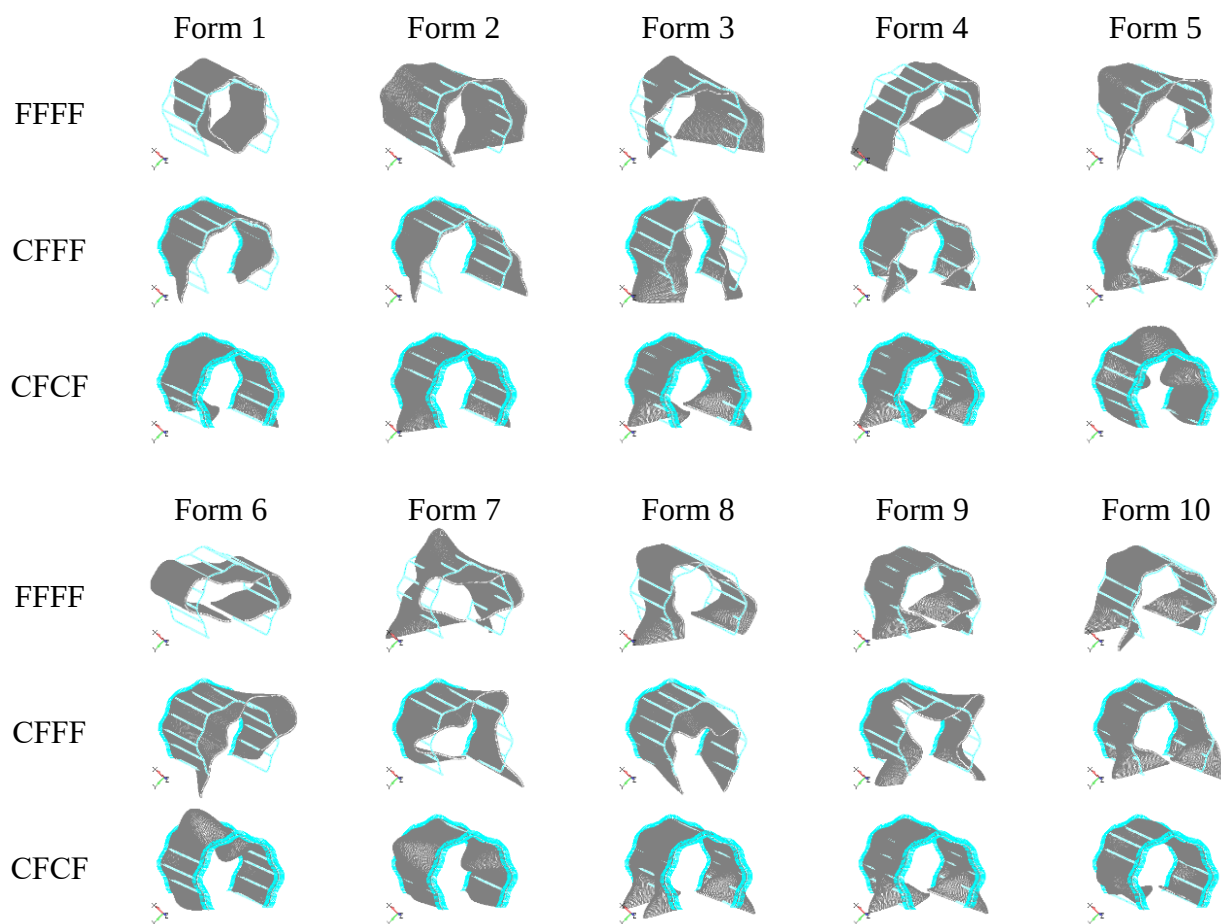


Рис. 7.75. Перші десять форм вільних коливань незамкнутої оболонки $\varphi=90^\circ$

7.5. Розрахунок частот та форм вільних коливань циліндричних оболонок різних товщин

За допомогою системи FEMAP побудовано геометрію десяти замкнутих кругових циліндричних оболонок висотою $h=0,12$ м, радіусом серединної поверхні $R_c=0,04$ м та з різним співвідношенням товщини оболонки до радіусу серединної поверхні d/R_c : 1/20, 1/18, 1/16, 1/14, 1/12, 1/10, 1/8, 1/6, 1/5, 1/4 (рис. 7.76) [300]. Як матеріал задавалась сталь з характеристиками: модуль Юнга $E=214$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,32$, густина $\rho=7820$ кг/м³.

Оболонки досліджувались при різних варіантах жорстко закріплених (C) і вільних країв (F).

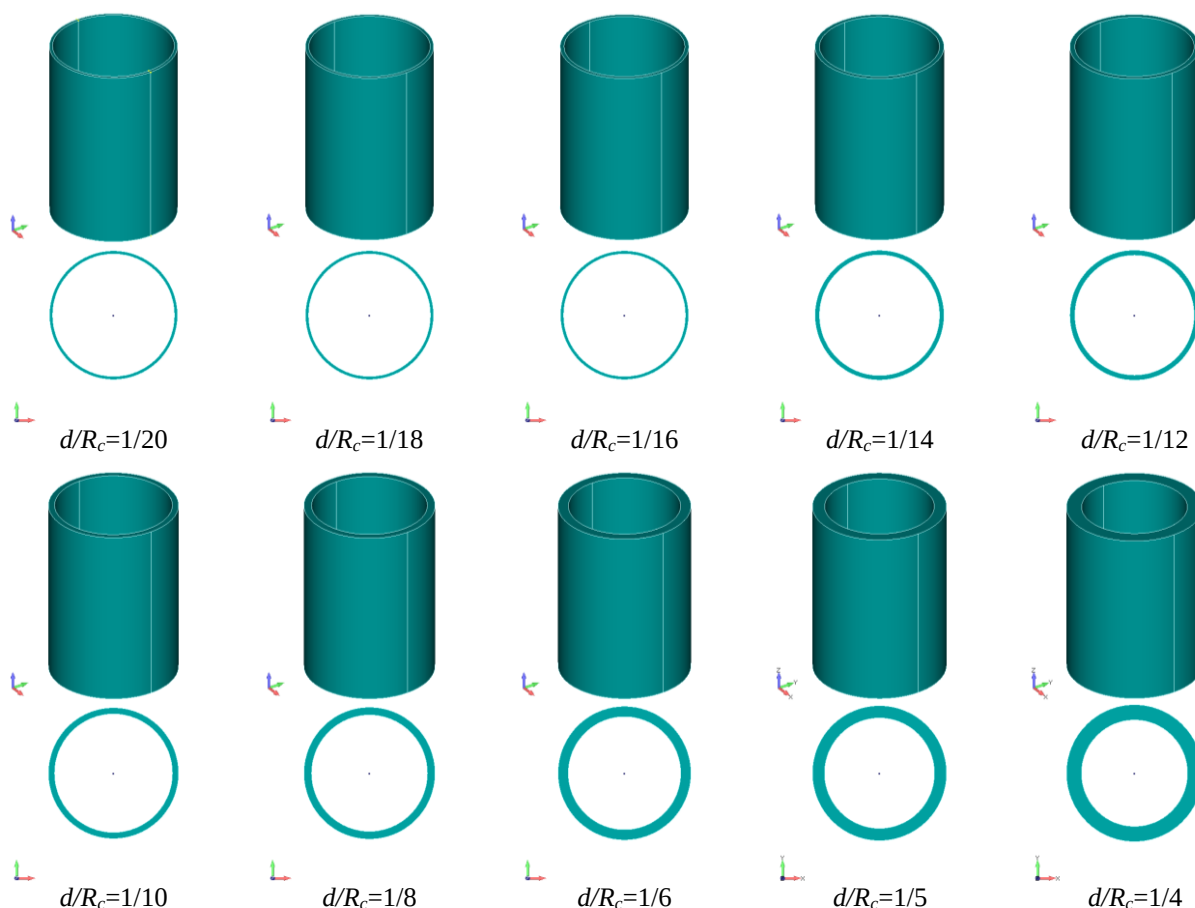


Рис. 7.76. Геометрія кругових циліндричних оболонок різного d/R_c

В результаті розрахунків отримано частоти і форми вільних коливань сталевих кругових циліндричних оболонок з різним співвідношенням товщини оболонки до радіусу серединної поверхні d/R_c з обома вільними кінцями (FF). Частоти вільних коливань досліджуваних оболонок наведені в таблиці 7.42, для кожної симетричної форми коливань Form (m ; n) встановлена несиметрична форма коливань Form (m' ; n') (рис. 7.77). Форми коливань Form (m ; n) відповідають формам коливань замкнутої гофрованої оболонки (FF), які зображені на рис. 7.58.

При розрахунку частот вільних коливань досліджуваних оболонок було виявлено частоти, наведені в таблиці 7.43, форми коливань яких відповідають деформаціям згину, кручення, розтягу-стиску та зсуву (рис.

7.78). При цьому тільки при згинних та зсувних коливаннях спостерігаються симетричні та несиметричні форми коливань.

Таблиця 7.42

Частоти вільних коливань кругових циліндричних оболонок різного d/R_c (FF)

Form		$f, \Gamma y$									
m	n	d/R_c									
		1/20	1/18	1/16	1/14	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5	1/4
1	4	915	996	1118	1285	1449	1698	2109	2792	3315	4089
1	6	2722	2940	3272	3611	4065	4767	5889	7730	9093	11060
1	8	4958	5381	6008	6646	7495	9038	11104	14387	16762	20027
1	10	7978	8650	9656	11020	12334	14545	17597	22503	25840	30418
1	12	11832	12798	14238	15966	17810	20809	25348	31730	36122	41756
2	4	1060	1154	1294	1487	1680	1966	2439	3219	3807	4670
2	6	2902	3140	3500	3903	4393	5151	6358	8323	9766	11825
2	8	5187	5629	6287	6994	7879	9455	11605	15030	17442	20773
2	10	8211	8903	9937	11335	12685	14951	18081	23078	26462	31071
2	12	12050	13034	14199	16270	18143	21197	25456	32242	36659	42301

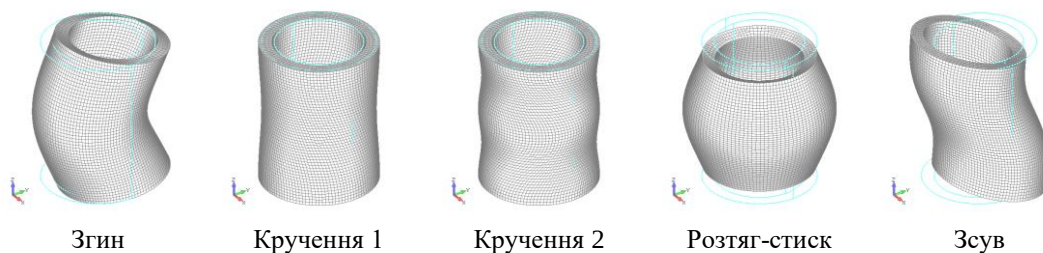


Рис. 7.77. Симетричні та несиметричні форми коливань

Таблиця 7.43

Частоти вільних коливань згину, кручення, розтягу-стиску та зсуву оболонок різного d/R_c (FF)

Form	$f, \Gamma y$									
	d/R_c									
	1/20	1/18	1/16	1/14	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5	1/4
Згин	14229	14231	14235	14240	14246	14288	14324	14412	14486	14620
Кручення 1	13405	13405	13404	13405	13404	13404	13404	13405	13404	13404
Кручення 2	26795	26795	26794	26795	26794	26794	26793	26796	26794	26794
Розтяг-стиск	18504	18504	18503	18502	18501	18507	18509	18516	18522	18533
Зсув	13970	13972	13976	13981	13987	14005	14028	14074	14112	14174

Рис. 7.78. Форми коливань оболонки $d/R_c=1/4$ (FF)

Аналізуючи частоти таблиці 7.42, можна встановити залежність зміни частоти вільних коливань від збільшення товщини оболонки, для цього поділимо частоти вільних коливань розглянутих оболонок на відповідну частоту вільних коливань оболонки із співвідношенням товщини оболонки до радіуса серединної поверхні $d/R_c=1/20$ та порівняємо отримані коефіцієнти з коефіцієнтом k_d , одержаним при діленні співвідношення d/R_c розглянутої оболонки на співвідношення $d/R_c=1/20$. Розраховані частотні коефіцієнти, з точністю до другого знака представлені в таблиці 7.44, показують зміну частоти пропорційно зміні товщини оболонки при збереженні величини радіуса серединної поверхні, із збільшенням величини частоти точність коефіцієнта втрачається. Частоти коливань, які відповідають деформаціям згину, кручення, розтягу-стиску та зсуву, змінюються мінімально: із збільшенням товщини оболонки відповідні частоти зростають, окрім частоти кручення, які залишаються незмінними (таблиця 7.43), тобто не залежать від зміни товщини оболонки.

Таблиця 7.44

Частотні коефіцієнти вільних коливань оболонок різного d/R_c (FF)

Form		$f, Гц$								
m	n	d/R_c								
		1/18	1/16	1/14	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5	1/4
1	4	1,09	1,22	1,40	1,58	1,86	2,30	3,05	3,62	4,47
1	6	1,08	1,20	1,33	1,49	1,75	2,16	2,84	3,34	4,06
1	8	1,09	1,21	1,34	1,51	1,82	2,24	2,90	3,38	4,04
1	10	1,08	1,21	1,38	1,55	1,82	2,21	2,82	3,24	3,81
1	12	1,08	1,20	1,35	1,51	1,76	2,14	2,68	3,05	3,53
2	4	1,09	1,22	1,40	1,58	1,85	2,30	3,04	3,59	4,41
2	6	1,08	1,21	1,34	1,51	1,77	2,19	2,87	3,37	4,07
2	8	1,09	1,21	1,35	1,52	1,82	2,24	2,90	3,36	4,00
2	10	1,08	1,21	1,38	1,54	1,82	2,20	2,81	3,22	3,78
2	12	1,08	1,18	1,35	1,51	1,76	2,11	2,68	3,04	3,51
k_d		1,11	1,25	1,43	1,67	2	2,5	3,33	4	5

Частоти вільних коливань сталевих кругових циліндричних оболонок з різним співвідношенням товщини оболонки до радіуса серединної поверхні d/R_c з одним вільним краєм, інший край жорстко закріплений (FC), наведені в таблиці 7.45. Для кожної симетричної форми коливань Form ($m; n$) встановлена несиметрична форма коливань Form ($m'; n'$). Форми коливань

Form ($m; n$) відповідають формам коливань замкнутої гофрованої оболонки (FC) (рис. 7.60).

Частоти вільних коливань кругових циліндричних оболонок з різним d/R_c (FC), форми коливань яких відповідають деформаціям згину, кручення, розтягу-стиску та зсуву (рис. 7.79), наведені в таблиці 7.46. При згинних та зсувних коливаннях спостерігаються симетричні та несиметричні форми коливань.

Таблиця 7.45

Частоти вільних коливань кругових циліндричних оболонок різного d/R_c (FC)

Form		$f, \Gamma\zeta$									
m	n	d/R_c									
		1/20	1/18	1/16	1/14	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5	1/4
1	4	1847	1895	1972	2086	2207	2408	2757	3384	3885	4649
1	6	2899	3117	3448	3801	4258	4971	6111	7986	9374	11371
1	8	5052	5485	6121	6779	7638	9192	11285	14634	17004	20294
1	10	8061	8739	9753	11129	12454	14684	17763	22701	26159	30648
1	12	11906	12877	14326	16068	17922	20942	25160	31909	36312	41952
2	4	6389	6425	6491	6588	6692	6907	7248	7909	8457	9322
2	6	4991	5270	5579	5974	6430	7211	8448	10543	12098	14321
2	8	6203	6657	7340	8128	9055	10710	13004	16661	19225	22732
2	10	8885	9609	10694	12163	13580	15985	19291	24527	28141	32802
2	12	12599	13623	15148	17011	18958	22168	26602	33601	38134	43897

Таблиця 7.46

Частоти вільних коливань згину, кручення, розтягу-стиску та зсуву оболонок різного d/R_c (FC)

Form	$f, \Gamma\zeta$									
	d/R_c									
	1/20	1/18	1/16	1/14	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5	1/4
Згин	3589	3592	3595	3600	3606	3616	3630	3654	3673	3704
Кручення 1	6703	6703	6703	6703	6703	6703	6703	6703	6703	6703
Кручення 2	20102	20102	20102	20102	20102	20102	20101	20103	20102	20102
Розтяг-стиск	10800	10804	10809	10816	10822	10836	10850	10870	10884	10902
Зсув	16045	16061	16088	16124	16163	16261	16377	16578	16719	16915

Рис. 7.79. Форми коливань оболонки $d/R_c=1/4$ (FC)

Аналізуючи частоти таблиці 7.45, аналогічно до попередньої задачі, можна встановити залежність зміни частоти вільних коливань від збільшення товщини оболонки. Розраховані частотні коефіцієнти з точністю до другого знака представлені в таблиці 7.47, є меншими за частотні коефіцієнти для оболонок з обома вільними краями, що вказує на значний вплив граничних умов, із збільшенням товщини оболонки розбіжність між коефіцієнтами, для двох різних способів закріплення, зростає. Частоти коливань, які відповідають деформаціям згину, кручення, розтягу-стиску та зсуву змінюються мінімально: із збільшенням товщини оболонки відповідні частоти зростають, окрім частоти кручення, які залишаються незмінними (таблиця 7.46), тобто не залежать від зміни товщини оболонки, а також накладених граничних умов.

Таблиця 7.47

Частотні коефіцієнти вільних коливань оболонок різного d/R_c (FC)

Form		$f, Гц$								
m	n	d/R_c								
		1/18	1/16	1/14	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5	1/4
1	4	1,03	1,07	1,13	1,19	1,30	1,49	1,83	2,10	2,52
1	6	1,08	1,19	1,31	1,47	1,71	2,11	2,75	3,23	3,92
1	8	1,09	1,21	1,34	1,51	1,82	2,23	2,90	3,37	4,02
1	10	1,08	1,21	1,38	1,54	1,82	2,20	2,82	3,25	3,80
1	12	1,08	1,20	1,35	1,51	1,76	2,11	2,68	3,05	3,52
2	4	1,01	1,02	1,03	1,05	1,08	1,13	1,24	1,32	1,46
2	6	1,06	1,12	1,20	1,29	1,44	1,69	2,11	2,42	2,87
2	8	1,07	1,18	1,31	1,46	1,73	2,10	2,69	3,10	3,66
2	10	1,08	1,20	1,37	1,53	1,80	2,17	2,76	3,17	3,69
2	12	1,08	1,20	1,35	1,50	1,76	2,11	2,67	3,03	3,48
k_d		1,11	1,25	1,43	1,67	2	2,5	3,33	4	5

Частоти вільних коливань сталевих кругових циліндричних оболонок з різним співвідношенням товщини оболонки до радіус серединної поверхні d/R_c з двома жорстко закріпленими краями (СС), наведені в таблиці 7.48, для кожної симетричної форми коливань Form ($m; n$) встановлена несиметрична форма коливань Form ($m'; n'$). Форми коливань Form ($m; n$) відповідають формам коливань замкнутої гофрованої оболонки (СС) (рис. 7.62).

Частоти вільних коливань кругових циліндричних оболонок з різним d/R_c (СС), форми коливань яких відповідають деформаціям згину, кручення,

розтягу-стиску та зсуву (рис. 7.80), наведені в таблиці 7.48. При згинних та зсувних коливаннях спостерігаються симетричні та несиметричні форми коливань.

Таблиця 7.48

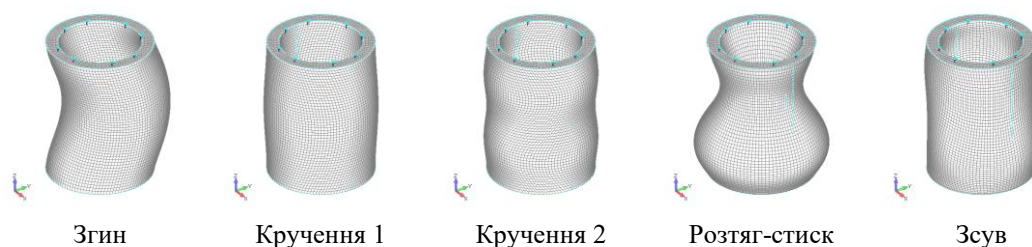
Частоти вільних коливань кругових циліндричних оболонок різного d/R_c (СС)

Form		$f, \Gamma\zeta$									
m	n	d/R_c									
		1/20	1/18	1/16	1/14	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5	1/4
1	4	5541	5613	5678	5775	5878	6086	6414	7045	7570	8402
1	6	4658	4841	5130	5477	5903	6632	7789	9761	11238	13374
1	8	5865	6292	6937	7648	8533	10146	12342	15865	18353	21787
1	10	8557	9257	10307	11731	13106	15440	18650	23770	27330	31947
1	12	12299	13300	14793	16601	18510	21647	25997	32913	37411	43159
2	4	10709	10783	10904	11080	11271	11690	12301	13455	14369	15752
2	6	8354	8565	8901	9362	9866	10817	12249	14707	16519	19081
2	8	8335	8793	9504	10378	11361	13175	15685	19696	22489	26261
2	10	10255	11014	12159	13714	15223	17841	21396	26968	30756	35620
2	12	13595	14671	16276	18263	20312	23751	28421	35700	40377	46285

Таблиця 7.49

Частоти вільних коливань згину, кручення, розтягу-стиску та зсуву оболонок різного d/R_c (СС)

Form	$f, \Gamma\zeta$									
	d/R_c									
	1/20	1/18	1/16	1/14	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5	1/4
Згин	8946	8956	8971	8994	9016	9066	9135	9263	9370	9544
Кручення 1	13405	13405	13404	13405	13404	13404	13404	13405	13404	13404
Кручення 2	26795	26795	26794	26795	26794	26794	26793	26796	26794	26794
Розтяг-стиск	19044	19073	19116	19169	19222	19352	19501	19780	19998	20331
Зсув	23734	23804	23841	23864	23881	23990	23842	23906	23940	23996

Рис. 7.80. Форми коливань оболонки $d/R_c=1/4$ (СС)

Розраховані частотні коефіцієнти за даними таблиці 7.48, з точністю до другого знаку представлені в таблиці 7.50, є меншими за частотні коефіцієнти для оболонок з одним вільним краєм, що показує вплив граничних умов на зміну частоти вільних коливань при зміні товщини

оболонки, із збільшенням товщини оболонки розбіжність між коефіцієнтами зростає. Частоти коливань, які відповідають деформаціям згину, кручення, розтягу-стиску та зсуву, змінюються мінімально: із збільшенням товщини оболонки відповідні частоти зростають, окрім частоти кручення, які залишаються незмінними (таблиця 7.49), тобто не залежать від зміни товщини оболонки, а також накладених граничних умов. Відмітимо, що частоти крутильних 1 коливань для оболонок з обома вільними краями та для оболонок з обома жорстко закріпленими краями є однаковим, а частоти крутильних 1 коливань для оболонок з одним вільним краєм є в два рази менші за частоти для оболонок з обома жорстко закріпленими краями.

Таблиця 7.50

Частотні коефіцієнти вільних коливань оболонок різного d/R_c (СС)

Form		$f, \Gamma y$ d/R_c								
m	n	1/18	1/16	1/14	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5	1/4
1	4	1,01	1,02	1,04	1,06	1,10	1,16	1,27	1,37	1,52
1	6	1,04	1,10	1,18	1,27	1,42	1,67	2,10	2,41	2,87
1	8	1,07	1,18	1,30	1,45	1,73	2,10	2,71	3,13	3,71
1	10	1,08	1,20	1,37	1,53	1,80	2,18	2,78	3,19	3,73
1	12	1,08	1,20	1,35	1,51	1,76	2,11	2,68	3,04	3,51
2	4	1,01	1,02	1,03	1,05	1,09	1,15	1,26	1,34	1,47
2	6	1,03	1,07	1,12	1,18	1,29	1,47	1,76	1,98	2,28
2	8	1,05	1,14	1,25	1,36	1,58	1,88	2,36	2,70	3,15
2	10	1,07	1,19	1,34	1,48	1,74	2,09	2,63	3,00	3,47
2	12	1,08	1,20	1,34	1,49	1,75	2,09	2,63	2,97	3,40
k_d		1,11	1,25	1,43	1,67	2	2,5	3,33	4	5

7.6. Визначення частот та форм вільних коливань товстостінних оболонок методом стробогологографічної інтерферометрії

Для проведення експериментального дослідження виготовлено товстостінну циліндричну оболонку (1) (рис. 7.81), яка виточена разом з масивним тілом (2) методом точіння на станку з ЧПУ з припуском 0,05 мм на діаметр. Оскільки жорстке закріплення (С) не допускає ні лінійних, ні кутових переміщень [301] ($u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$), а при експериментальних дослідженнях МСГІ малих вільних коливань оболонок з інтерферограм [232] можна з точністю до амплітуди коливань 10^{-4} мм

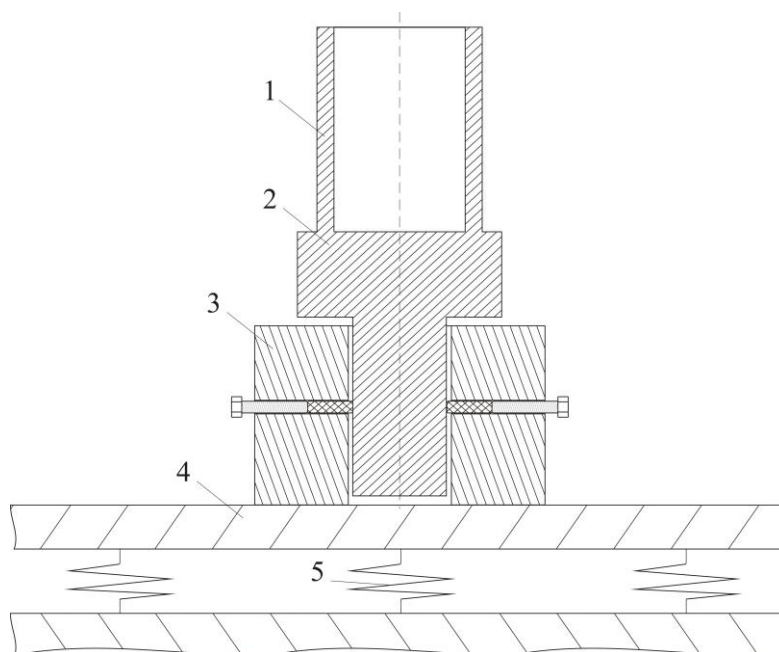


Рис. 7.82. Кріплення товстостінної оболонки (FC) при експерименті

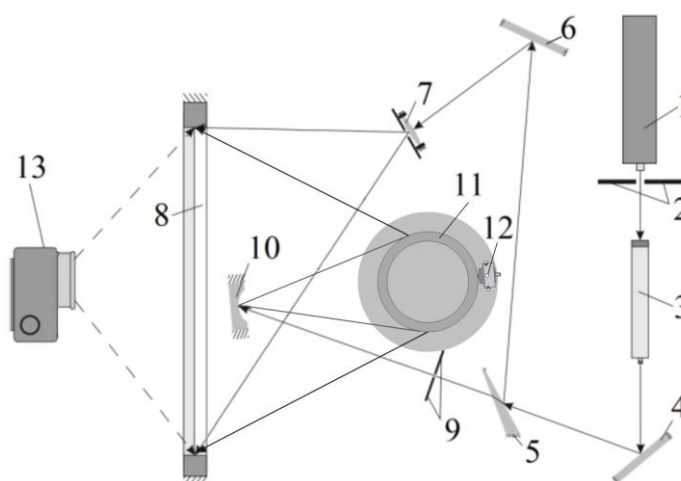


Рис. 7.83. Оптична схема установки

Принцип дії вібратора (1) (рис. 7.84) для збудження оболонок, так само як і вібратора (рис. 5.6) для збудження пластин, заснований на принципі зворотного п'єзоефекту, що дозволяє створювати віброприскорення великих значень, відмінність полягає у реалізації закріплення (2) вібратора (рис. 7.84), що дає можливість переміщувати точку збудження оболонки, тобто отримувати різний набір та різну якість інтерференційних картин досліджуваної оболонки.

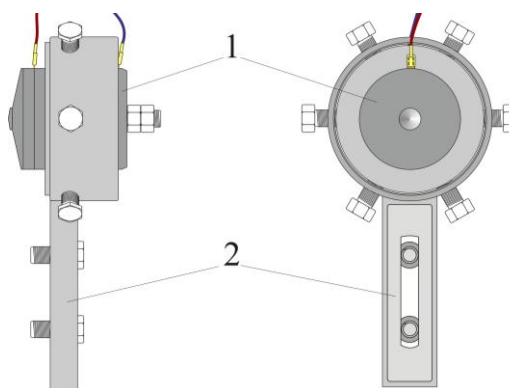


Рис. 7.84. П'єзокерамічний вібратор для збудження оболонки

Методика проведення експерименту детально описана в п. 5.2.

Для порівняння експериментально отриманих частот і форм вільних коливань була побудована скінченно-елементна модель досліджуваної товстостінної оболонки (рис. 7.85). Скінченно-елементна модель оболонки жорстко закріплювалась по поверхні одного торця оболонки (FC) [302, 303].

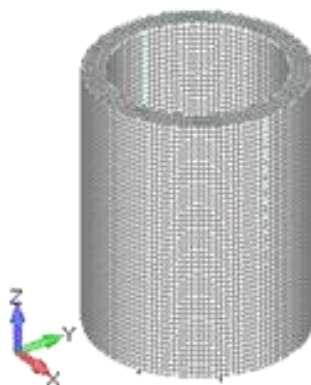


Рис. 7.85. Скінченно-елементна модель товстостінної циліндричної оболонки (FC)

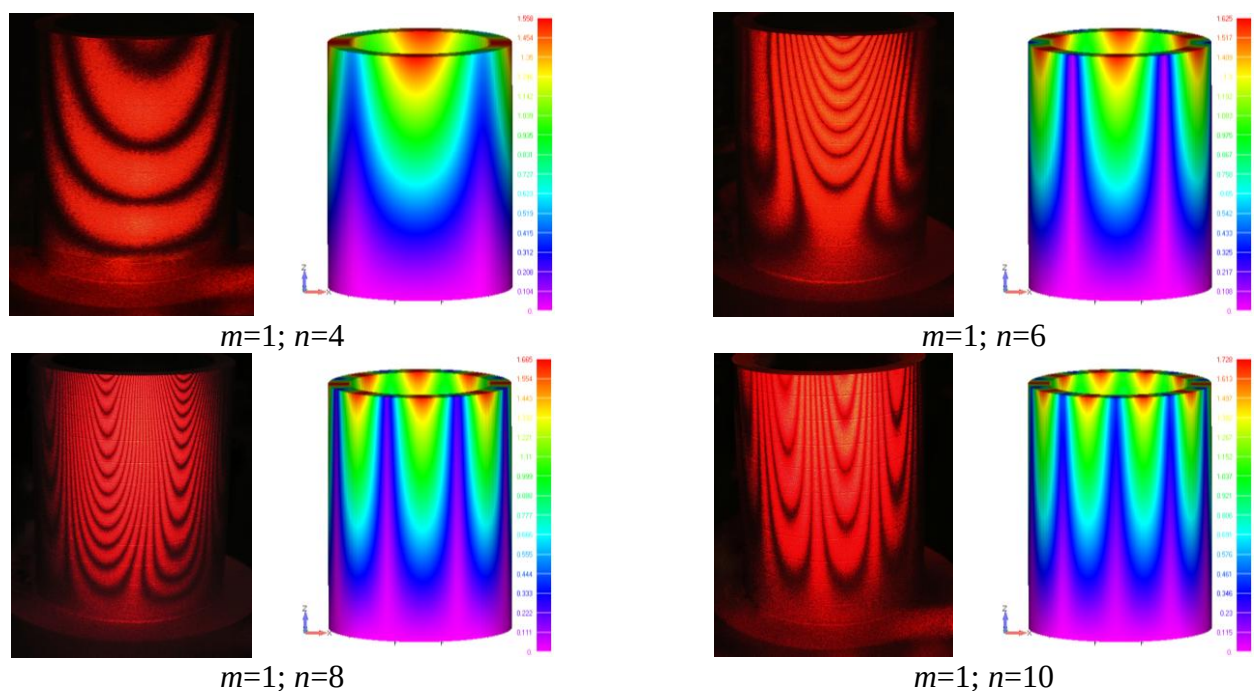
Частоти вільних коливань товстостінної циліндричної оболонки (FC), отримані методом стробогографічної інтерферометрії та розраховані методом скінченних елементів, представлені в таблиці 7.51.

Частоти вільних коливань товстостінної циліндричної оболонки (FC)

m	n	$f, \Gamma\text{ц}$		$\varepsilon, \%$
		МСПГ	МСЕ	
1	4	3908	4118	5,1
1	6	9377	9758	3,9
1	8	16552	17478	5,3
1	10	25565	26520	3,6
2	4	8814	9031	2,4
2	6	12617	12901	2,2
2	8	18956	20059	5,5
2	10	27831	28811	3,4

Частоти вільних коливань розраховані МСЕ для двох скінченно-елементних моделей оболонок мають мале відхилення, що доводить коректність реалізації жорсткого закріплення при експериментальних дослідженнях та нехтування побудови масивного тіла при чисельних розрахунках, що скорочує час комп'ютерного розрахунку та зменшує об'єм займаної пам'яті на комп'ютері.

Форми вільних коливань ($m=1$) отримані експериментально та чисельно представлені на рис. 7.86.

Рис. 7.86. Форми вільних коливань ($m=1$) товстостінної циліндричної оболонки (FC)

Форми вільних коливань ($m=2$) отримані експериментально та чисельно представлені на рис. 7.87.

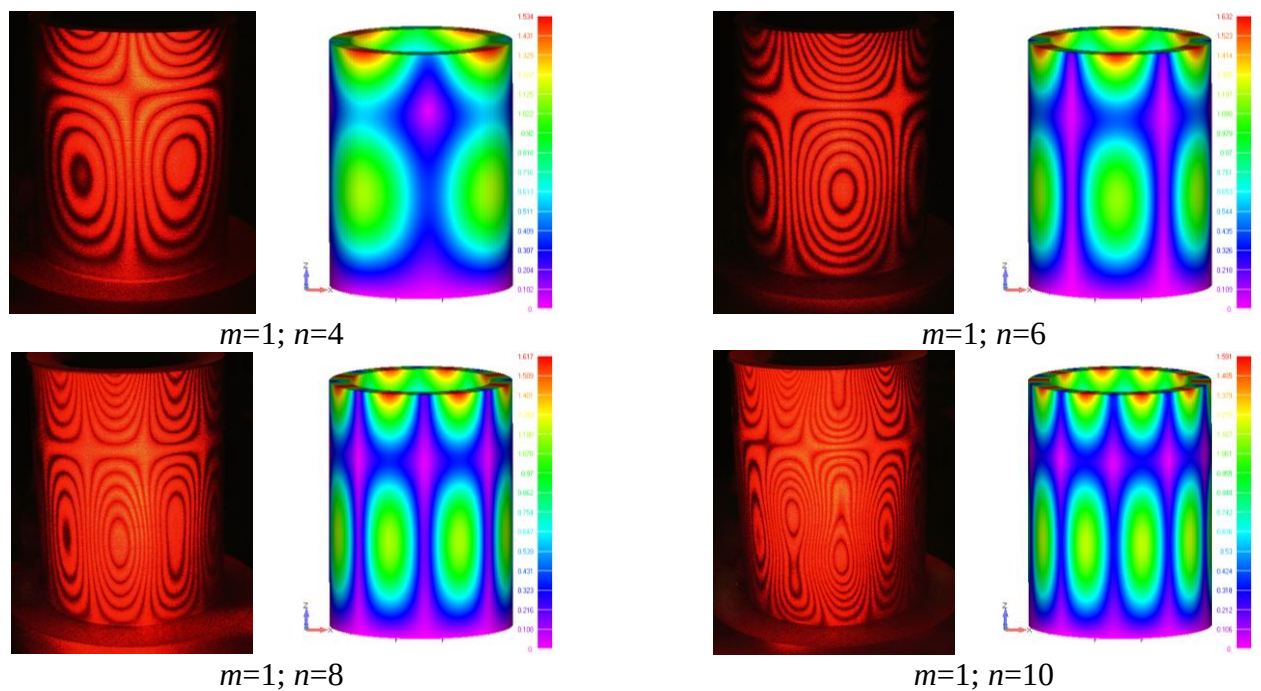


Рис. 7.87. Форми вільних коливань ($m=2$) товстостінної циліндричної оболонки (FC)

Чисельно отримані форми вільних коливань за рахунок динамічної і статичної спектральної 3D моделі та можливості масштабування переміщень поверхні оболонки дають змогу більш якісно класифікувати форми коливань, отримані експериментально у вигляді інтерференційних картин, та встановити діапазон пошуку частот вільних коливань.

При експериментальних дослідженнях встановлені згинні форми коливань (рис. 7.88), частоти яких представлені в таблиці 7.52, а також підтверджено існування симетричних та несиметричних форми коливань (рис. 7.89) з різницею частоти до 10 Гц.

Таблиця 7.52

Частоти згинних коливань товстостінної циліндричної оболонки (FC)

Form	$f, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$
	Експ.	МСЕ δ)	
Згин 1	10028	10818	7,3
Згин 2	18443	19033	3,1
Згин 3	23722	25183	5,8

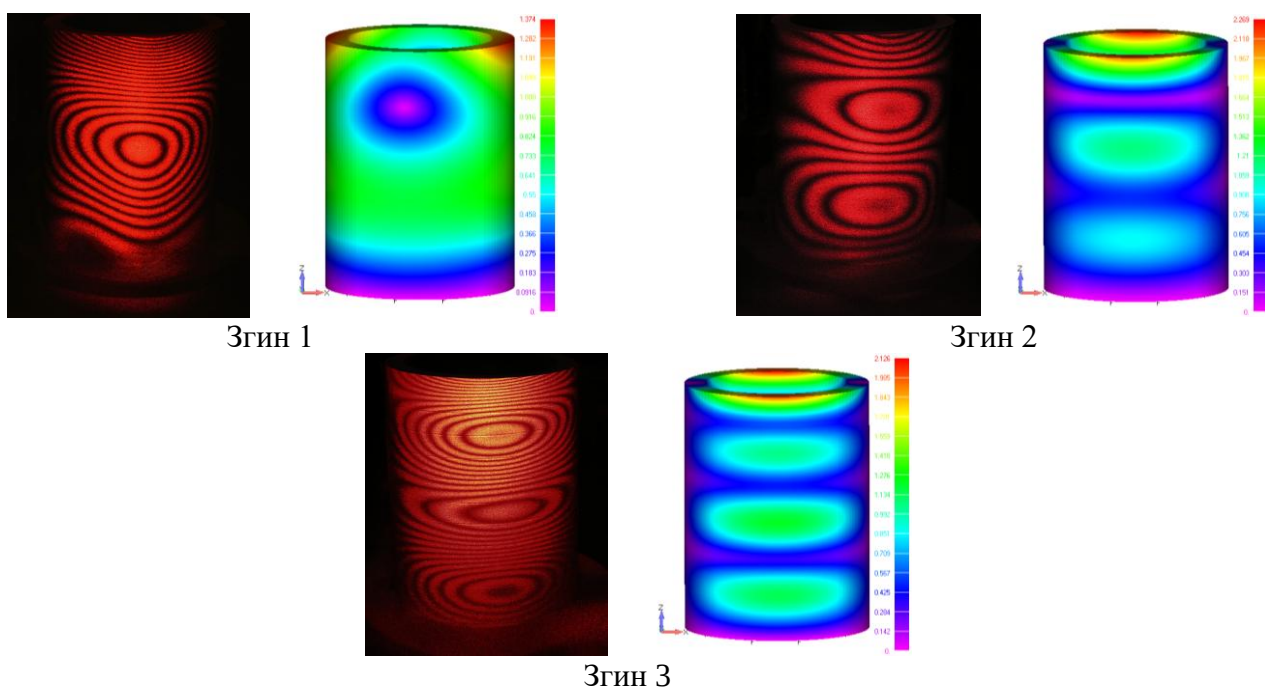


Рис. 7.88. Форми згинних коливань товстостінної циліндричної оболонки (FC)

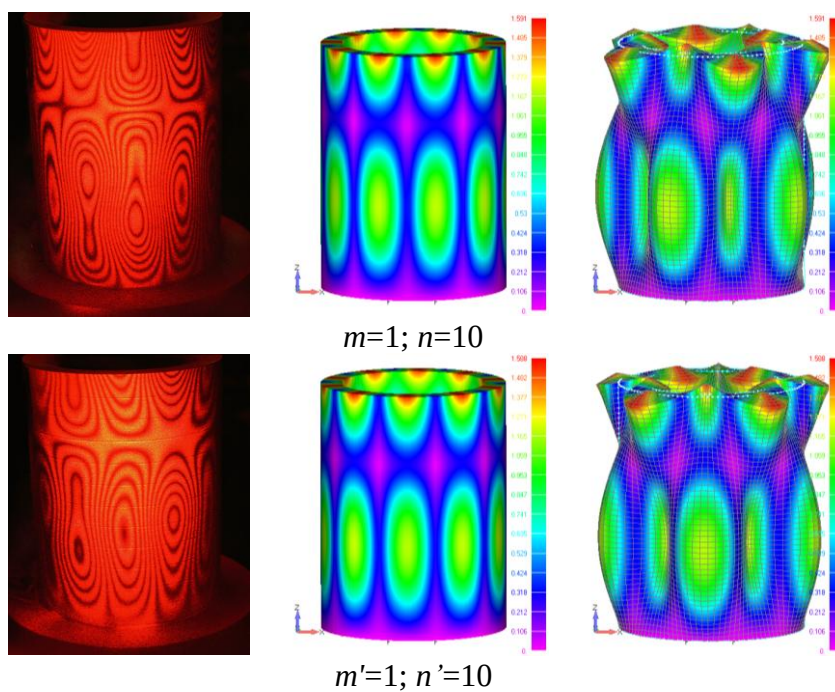


Рис. 7.89. Симетрична та несиметрична форма коливань товстостінної циліндричної оболонки (FC)

7.7. Результати та висновки

1. Методом скінченних елементів розраховано частоти і форми вільних коливань циліндричних оболонок різного поперечного перерізу, як

тестові задачі, та проведено порівняння отриманих результатів з результатами отриманими експериментально та чисельно іншими авторами. Отримані результати для всіх тестових оболонок різного поперечного перерізу з різними граничними умовами показують хорошу збіжність з результатами отриманими іншими авторами, що свідчить про доцільність використання запропонованого методу до розрахунків частот вільних коливань ізотропних оболонок з різними конструктивними неоднорідностями.

2. Проведено аналіз різних типів та розмірів скінченного елемента для розрахунку частот та форм вільних коливань оболонок різної конструктивної неоднорідності з урахуванням оптимального комп'ютерного часу розрахунку та збіжності отриманих результатів.
3. Проведено розрахунок частот і форм вільних коливань замкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу різного ексцентриситету. Встановлено залежності частоти вільних коливань від значення ексцентриситету та граничних умов, накладених на обидва торці замкнутих оболонок.
4. Проведено розрахунки частот і форм вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок еквівалентної маси еліптичного поперечного перерізу різного ексцентриситету сталої та змінної товщини. Встановлено залежності частоти вільних коливань від значення ексцентриситету, способу та кута розкриття оболонки, характеру зміни товщини та граничних умов, накладених на всі торці незамкнутих оболонок.
5. Проведено розрахунки частот і форм вільних коливань замкнутих та незамкнутих циліндричних оболонок еквівалентної маси гофрованого поперечного перерізу. Встановлено залежності частоти вільних коливань від кількості гофрів, способу та кута розкриття, граничних умов, накладених на всі торці незамкнутих гофрованих оболонок, та фізико-механічних характеристик.
6. Проведено розрахунки частот і форм вільних коливань замкнутих

циліндричних оболонок з різним співвідношенням товщини оболонки до радіуса серединної поверхні. Встановлено залежності частоти вільних коливань від співвідношення товщини оболонки до радіуса серединної поверхні та граничних умов, накладених на обидва торці.

7. Для замкнутих циліндричних оболонок встановлено частоти коливань, які відповідають деформаціям згину, кручення, розтягу-стиску та зсуву. Встановлено симетричні та несиметричні форми коливань.
8. Визначено експериментально частоти і форми вільних коливань товстостінної оболонки з жорстко закріпленим одним торцем, інший торець вільний, які підтверджують чисельні розрахунки. Чисельно отримані форми вільних коливань, за рахунок динамічної і статичної спектральної 3D моделі та можливості масштабування переміщень поверхні оболонки, дають змогу більш якісно класифікувати форми коливань, отримані експериментально у вигляді інтерференційних картин, та встановити діапазон пошуку частот вільних коливань.

ВИСНОВКИ

Представлена дисертаційна робота присвячена аналізу вільних коливань пружних багатокутних пластин та циліндричних оболонок різного поперечного перерізу з конструктивною неоднорідністю на основі розвинених чисельних та експериментальних підходів, встановленню залежностей частот та форм вільних коливань пластин та оболонок від різних конструктивних параметрів.

На основі методу скінченних елементів, модифікованої формули для розрахунку частот вільних коливань ізотропних квадратних пластин, резонансного методу та методу стробогологографічної інтерферометрії розвинено та поширено чисельні та експериментальні підходи для визначення частот і форм вільних коливань пластин та оболонок з різною конструктивною неоднорідністю, створено дві віброустановки та представлені методики проведення експериментів та розрахунків.

Одержано нові розв'язки широкого класу задач динаміки багатокутних пластин та некругових циліндричних оболонок, на основі яких проведено аналіз впливу конструктивної неоднорідності, геометричних параметрів, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов на спектр частоти та форми вільних коливань пружних механічних об'єктів, що розглядалися.

Основні результати проведених досліджень, що представлені в дисертації, наведені нижче:

1. Розвинено чисельний підхід на основі методу скінченних елементів для розрахунку частот та форм вільних коливань ізотропних багатокутних пластин з отвором і без та замкнутих і незамкнутих циліндричних оболонок різного поперечного перерізу, різної товщини, з різними варіантами граничних умов.
2. Розроблено комбінований підхід для визначення частот вільних коливань ізотропних багатокутних пластин різної товщини та розраховані методом скінченних елементів коефіцієнти для кожної багатокутної пластини з

різними граничними умовами залежно від співвідношення товщини до сторони пластини.

3. Розвинено експериментальний підхід на основі резонансного методу та створено віброкомплекс для демонстрації коливань в реальному часі та визначення з достатнім ступенем достовірності частот і форм вільних коливань багатокутних пластин.
4. Розвинено експериментальний підхід на основі стробоголографічної інтерферометрії та створено стробокомплекс для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та товстостінних циліндричних оболонок, який в реальному часі демонструє коливання поверхні пружного тіла у вигляді інтерференційних картин, дає можливість змінювати режим вібробудження та амплітуду коливань, з високим ступенем достовірності досліджувати спектр частот і форм вільних коливань.
5. Різними підходами побудовано нові розв'язки задач динаміки для таких пластин та оболонок:
 - трикутні, чотирикутні, п'ятикутні та шестикутні пластини різної товщини з різними варіантами вільних та жорстко закріплених країв;
 - трикутні, чотирикутні, п'ятикутні, шестикутні та круглі пластини з отвором з різними варіантами вільних та жорстко закріплених країв та отвору, трикутні пластини з різним розміщенням круглого отвору та отвору різного радіуса;
 - замкнуті та незамкнуті циліндричні оболонки еліптичного поперечного перерізу з різним значенням ексцентриситету, сталої та змінної товщини, з різним характером розкриття, з різними граничними умовами на торцях;
 - замкнуті та незамкнуті циліндричні оболонки гофрованого поперечного перерізу з різною кількістю гофрів, з різним характером розкриття, з різними граничними умовами на торцях;
 - товстостінні циліндричні оболонки з різними граничними умовами на торцях.
6. Проведено аналіз вільні коливання широкого класу пластин і оболонок з

різною конструктивною неоднорідністю та отримано нові результати у вигляді числових значень частот та ілюстрацій форм вільних коливань, проведено порівняння результатів отриманих за допомогою різних підходів.

7. На основі результатів, отриманих різними чисельними та експериментальними підходами, проведено аналіз особливостей динамічних характеристик широкого класу неоднорідних пластин і оболонок, виявлені закономірності впливу геометричних параметрів, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов на спектр частот і форм вільних коливань кожного з розглянутих пружних тіл.

Отримані результати та розвинені підходи можуть бути використанні при розв'язанні широкого класу практичних задач визначення динамічних характеристик вільних коливань пластинчастих та оболонкових елементів з різною конструктивною неоднорідністю; розвинений чисельний підхід дає можливість отримувати достовірну інформацію про спектр частот і форм вільних коливань елементів конструкції в умовах максимально наближених до реальних умов експлуатації без значних затрат коштів та часу, змінюючи різні параметри, обирати оптимальні геометричні розміри, економічно вигідні матеріали та способи закріплення для забезпечення міцності, стійкості та надійності конструкції; розроблений комбінований підхід дає можливість швидко визначити частоти і форми вільних коливань багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами; розвинені експериментальні підходи дають можливість в реальному часі демонструвати вільні коливання пружних тіл, а одержані результати застосовувати для оцінки результатів, отриманих різними теоретичними методами.

Результати отримані комбінованим підходом були передані для впровадження в розрахункову практику державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля».

Результати дисертаційного дослідження використано в рамках виконання цільової програми з оборонної тематики за напрямом прикладні дослідження і розробки згідно з договорами ІМех-2024/2 та ІМех-2025/1.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Chladni E.F.F. Die Akustik. Leipzig: Breitkopf und Härtel (1802).
2. Tyndall, J. Sound. A Course of Eight Lectures Delivered at the Royal Institution of Great Britain (1875).
3. Nieves F. J., Gascon, Bayon A. Natural frequencies and mode shapes of flexural vibration of plates: Laser-interferometry detection and solutions by Ritz's method. J. Sound Vib. 278 (3), 637-655 (2004).
4. Waller M.D. Vibration of free rectangular plates. Proc. Phys. Soc. Section B. 62(5), 277-285 (1949).
5. Waller M.D. Vibration of free square plates: Part I. Normal vibrating modes. Proc. Phys. Soc. 51(5), 831-844 (1939).
6. Wheatstone C. On the figures obtained by strewing sand on vibrating surfaces, commonly called acoustical figures. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. No 3, 180-181 (1833).
7. Lord Rayleigh, Strutt J.W. XVI. On the nodal lines of a square plate. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 304 (46), 166-171 (1873).
8. Strutt J.W., Lord Rayleigh. The Theory of Sound. London: Macmillan. Vol. II (1878).
9. Ritz W. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. Ann. Physik. 333 (4), 737-786 (1909).
10. Lord Rayleigh. XXIV. On the calculation of Chladni's figures for a square plate. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 128 (22), 225-229 (1911).
11. Holmes, M. H. The mechanics of vibrations of cylindrical shells (Stefan Markus). SIAM Review, 31 (2) (1989).
12. Soedel W. Vibrations of Shells and Plates. New York: Marcel Dekker, Inc. 3rd edition (2005).
13. Timoshenko S.P., Young D.H. Weaver W.Jr. Vibration problems in

engineering. 4rd ed. John Wiley and Sons (1974).

14. Болотин В.В. Современные направления в области динамики пластин и оболочек. Труды II Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. К. 16-32 (1962).
15. Timoshenko S. History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. Courier Corporation (1983).
16. Starovoitov E., Naghiyev F.B.O. Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity. CRC Press (2012).
17. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек. К.: Наук. Думка (1964).
18. Ониашвили О.Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. М.: Изд-во АН СССР (1957).
19. Kumar Y. The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review. Journal of Vibration and Control. 24 (7), 1205-1227 (2018).
20. Awrejcewicz J., Kudra G., Mazur O. Parametric vibrations of graphene sheets based on the double mode model and the nonlocal elasticity theory. Nonlinear Dynamics, 105 (3), 2173-2193 (2021).
21. Grigorenko A.Y., Tregubenko T.V. Numerical and experimental analysis of natural vibrations of rectangular plates with variable thickness. International applied mechanics. 36 (2), 268-270 (2000).
22. Grigorenko Y., Grigorenko A., Efimova T. Spline-based investigation of natural vibrations of orthotropic rectangular plates of variable thickness within classical and refined theories. Journal of Mechanics of Materials and Structures. 3 (5), 929-952 (2008).
23. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Spline-Approximation Method Applied to Solve Natural Vibration Problems for Rectangular Plates of Varying Thickness. Int. Appl. Mech. 41 (10), 1161-1169 (2005).
24. Grigorenko A.Y., Müller W.H., Will R., Yaremchenko S.N. Numerical solution of the problem of the stress-strain state in hollow cylinders using spline

- approximations. *Journal of Mathematical Sciences*. 180 (2), 135-145 (2012).
25. Gorman D. J. Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition. *J. Sound Vib.* 57 (3), 437-447 (1978).
 26. Iguchi S. Die Eigenschwingungen und Klangfiguren der freien recteckigen Platte. *Ing.-Archiv*. 21 (5), 304-322 (1953).
 27. Leng B., Ullah S., Yu T., Li K. New analytical free vibration solutions of thin plates using the Fourier series method. *Applied Sciences*, 12 (17), 8631 (2022).
 28. Варвак П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластин, ч.1. Киев: Изд. АН УССР (1949).
 29. Kukla S. Application of Green's function in free vibration analysis of a system of line connected rectangular plates. *Journal of sound and vibration*. 217(1), 1-15 (1998).
 30. Huang M., Ma X.Q., Sakiyama T., Matsuda H., Morita C. Free vibration analysis of continuous rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*. 329 (4), 485-496 (2010).
 31. Bolotin V.V. *Random vibrations of elastic systems* (Vol. 8). Springer Science & Business Media (2013).
 32. Мелешко В.В., Папков С.О. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1990) до наших дней. *Акуст. вісник*. 12 (4), 34-51 (2009).
 33. Андрущенко В.А., Бондаренко А.А., Мелешко В.В., Никитенко В.Н. Определение упругих постоянных квадратных пьезокерамических пластин резонансным методом. *Акуст. вісн*. 9 (3), 3-11 (2006).
 34. Belubekyan M.V., Sarkisyan S.V. On the improving of the plate non-linear vibrations equations. *Proceedings of the Yerevan State University, series Physical and Mathematical Sciences*. No 1, 41-46 (1992).
 35. Breslavsky I.D., Avramov K.V. Influence of nonlinearities in boundary conditions on the free vibrations of plates under geometrically nonlinear deformation. *J. Math. Sci.* 194 (2), 213-224(2013).
 36. Aliyev K.A., Bayramov G.N. Вимушені коливання обпертої в шести

точках контуру круглої пластинки в фізично нелінійній постановці. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. № 21, 30-35 (2013).

37. Zhou Z.H., Wong K.W., Xu X.S., Leung A.Y.T. Natural vibration of circular and annular thin plates by Hamiltonian approach. *Journal of Sound and Vibration*, 330 (5), 1005-1017 (2011).
38. Leissa A.W. *Vibration of Shells*. Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration. Vol. 288. (1973).
39. Love A.E.H. XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 179 (A), 491-546.(1888).
40. Markus S. *The mechanics of vibrations of cylindrical shells*. Elsevier (1988).
41. Qatu M.S. Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989-2000, Part 2: Homogeneous shells. *Appl. Mech. Rev.* 55 (5), 415-434 (2002).
42. Василенко М.В., Алексейчук О.М. *Теорія коливань і стійкості руху: Підручник*. К.: Вища шк. (2004).
43. Василенко Н.В. *Теория колебаний*. К.: Вища школа (1992).
44. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. *Свободные колебания элементов оболочечных конструкций*. К.: Наукова Думка (1986).
45. Reddy J.N., Arciniega R.A. Shear deformation plate and shell theories: from Stavsky to present. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 11(6), 535-582 (2004).
46. Khademi-kouhi M., Shakouri M. Vibration of cylindrical shells: Design criteria for transition from shell modes to beam modes. *arXiv preprint arXiv:2004.09844* (2020).
47. Hart F.D., Miller D.K. Modal density of thin circular cylinders (No. NASA-CR-897). NASA (1967).
48. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G., Kudish I.I. Free Vibrations of a Thin Elastic Orthotropic Cylindrical Panel with Free Edges. *Mech Compos*

- Mater. 55, 557-574 (2019).
49. Arnold R.N., Warburton G.B. The flexural vibration of thin cylinders. Proc. Inst. Mech. Engrs. 167 (1), 62-80 (1953).
 50. Baron M.L., Bleich H.H. Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells. J. Appl. Mech. 21 (2), 178-188 (1954).
 51. Yu Y.Y. Free vibration of thin cylindrical shells having finite length with freely supported and clamped edges. J. Appl. Mech. 22 (4), 547-552 (1955).
 52. Pellicano F. Linear and Nonlinear vibration of shells. In: 2nd International Conference on Nonlinear Normal Modes and Localization in Vibration Systems, Samos, June 19-23, 2006. 1-12 (2006).
 53. Lam K.Y., Liew K.M., Chow S.T. Free vibration analysis of isotropic and orthotropic triangular plates. Int. J. Mech. Sci. 32 (5), 455-464 (1990).
 54. Leissa A.W., Jaber N.A. Vibrations of completely free triangular plates. Int. J. Mech. Sci. 34 (8), 605-616 (1992).
 55. Huang C.S., Leissa A.W. Vibration analysis of rectangular plates with side cracks via the Ritz method. J. of Sound and Vibration. 323 (3-5), 974-988 (2009).
 56. Young D. Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method. J. Appl. Mech. 17 (4), 448-453 (1950).
 57. Wang C.Y. Vibrations of completely free rounded regular polygonal plates. Int. J. Acous. Vib. 20 (2), 107-112 (2015).
 58. Young P.G., Dickinson, S.M. Further studies on the vibration of plates with curved edges, including complicating effects. J. Sound Vib. 177(1), 93-109 (1994).
 59. Cheung Y.K., Zhou D. Three-dimensional vibration analysis of cantilevered and completely free isosceles triangular plates. International Journal of Solids and Structures, 39 (3), 673-687 (2002).
 60. Abrate S. Vibration of point supported triangular plates. Computers & structures. 58 (2), 327-336 (1996).

61. Sakiyama T., Huang M. Free-vibration analysis of right triangular plates with variable thickness. *Journal of Sound and Vibration*, 234 (5), 841-858 (2000).
62. Liew K.M. Research on thick plate vibration: A literature survey. *J. Sound Vibr.* 180 (1), 163-176 (1995).
63. Xing Y., Liu B. Characteristic equations and closed-form solution for free vibrations of rectangular Mindlin plates. *Acta Mech. Solida Sinica*. 22 (2), 125-136 (2009).
64. Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S. Transverse vibration of thick rectangular plates-I. Comprehensive sets of boundary conditions. *Comput. and Struct.* 49 (1), 1-29 (1993).
65. Karunasena W., Kitipornchai S., Al-Bermani F.G.A. Free vibration of cantilevered arbitrary triangular Mindlin plates. *Int. J. Mech. Sci.* 38 (4), 431-442 (1996).
66. Ghugal Y.M., Sayyad A.S. Free vibration of thick orthotropic plates using trigonometric shear deformation theory. *Latin American J. of Solids and Struct.* No 8, 229-243 (2010).
67. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Appl. and Comput. Mech.* 6 (1), 65-82 (2012).
68. Singh A.V., Muhammad T. Free in-plane vibration of isotropic non-rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*. 273 (1-2), 219-231 (2004).
69. Senjanović I., Tomić M., Vladimir N., Cho D.S. Analytical solution for free vibrations of a moderately thick rectangular plate. *Mathem. Prob. in Engin.* 1, 207460 (2013).
70. Gupta A.K., Kumar A., Gupta Y.K. Vibration of visco-elastic parallelogram plate with parabolic thickness variation. *Applied Mathematics*. 1 (2), 128-136 (2010).
71. Laura P.A., Possi R. Transverse vibrations of a thin, elastic plate of regular hexagonal shape. *J. Sound Vib.* 256(2), 367-372 (2002).
72. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads. *Int. Appl. Mech.* 39 (12), 1458-1463 (2003).

73. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation. *Int. Appl. Mech.* 46(1), 86-93 (2010).
74. Hegarty F., Ariman T. Elasto-dynamic analysis of rectangular plates with circular holes. *Int. J. of Solids and Struct.* 11 (7-8), 895-906 (1975).
75. Huang M., Sakiyama T. Free vibration analysis of rectangular plates with variously-shaped holes. *J. Sound Vib.* 226 (4), 769-786 (1999).
76. Boay C.G. Free vibration of laminated composite plates with a central circular hole. *Composite Struct.* 35 (4), 357-368 (1996).
77. Lam K.Y., Hung K.C., Chow S.T. Vibration analysis of plates with cutouts by the modified Rayleigh-Ritz method. *Appl. Acoust.* 28 (1), 49-60 (1989).
78. Cho D.S., Kim B.H., Kim J.H., Vladimir N., Choi T.M. Frequency response of rectangular plates with free-edge openings and carlings subjected to point excitation force and enforced displacement at boundaries. *Int. J. of Naval Arch. and Ocean Engin.* 8 (2), 117-126 (2016).
79. Nagaya K. Simplified method for solving problems of vibrating plates of doubly connected arbitrary shape, part II: applications and experiments. *J. Sound Vib.* 74 (4), 553-564 (1981).
80. Nagaya K. Simplified method for solving problems of vibrating plates of doubly connected arbitrary shape, Part I: Derivation of the frequency equation. *J. Sound Vib.* 74 (4), 543-551 (1981).
81. Patel B.P., Gupta S.S., Loknath M.S., Kadu C.P. Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory. *Composite structures.* 69 (3), 259-270 (2005).
82. Yu A.M., Hao Y. Free vibration analysis of cylindrical helical springs with noncircular cross-sections. *Journal of Sound and Vibration.* 330 (11), 2628-2639 (2011).
83. Hayek S.I., Boisvert J.E. Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 128(3), 1063-1072 (2010).
84. Kalnins A. Analysis of Shells of Revolution Subjected to Symmetrical and

- Hon-symmetrical Loads. Trans. ASME. 3 (3), 467-476 (1964).
85. Stricklin J.A., Martinez J.E., Tillerson J.R., Hong J.H., Haisler W.E. Nonlinear Dynamic Analysis of Shells of Revolution by Matrix Displacement Method. AIAA J. 9 (4), 629-636 (1971).
 86. Fafard M., Henchi K., Gendron G., Ammar S. Application of an asymptotic method to transient dynamic problems. Journal of sound and vibration. 208 (1), 73-99 (1997).
 87. Mekhtiev M.F., Bergman R.M. Asymptotic analysis of the dynamic problem of the theory of elasticity for a transverse isotropic hollow cylinder. Journal of sound and vibration. 244 (2), 177-194 (2001).
 88. Bergman R.M. Investigation of the free vibrations of noncircular cylindrical shells. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 37 (6), 1068-1077 (1973).
 89. Elsbernd G.F., Leissa A.W. The vibration of non-circular cylindrical shells with initial stresses. J. Sound Vib. 29 (3), 309-329 (1973).
 90. Mc Daniel T.J., Logan J.D. Dynamics of cylindrical shells with variable curvature. J. Sound Vib. 19 (1), 39-48 (1971).
 91. Ahmed M.K. A study of free vibration of a circumferentially non-uniform cylindrical shell with a four-lobed cross-section. Journal of Vibration and Control. 17(8), 1158-1172 (2011).
 92. Ahmed M.K. A new vibration approach of an elastic oval cylindrical shell with varying circumferential thickness. Journal of Vibration and Control. 18 (1), 117-131 (2012).
 93. Karagiozis K.N., Amabili M., Païdoussis M.P., Misra A.K. Nonlinear vibrations of fluid-filled clamped circular cylindrical shells. Journal of Fluids and Structures. 21 (5-7), 579-595 (2005).
 94. Xiong L., Li T.Y., Zhu X., Zhu X.M. Free vibration analysis of fluid-filled elliptical cylindrical shells. Applied Mechanics and Materials. 437, 102-109 (2013).
 95. Zhang G.J., Li T.Y., Zhu X., Xiong L., Xiong Y.P. Natural frequencies of eccentric cylindrical shells filled with pressurized fluid. In Analysis and

- Design of Marine Structures V. CRC Press. 203-210 (2015).
96. Zheng S., Yu Y., Qiu M., Wang L., Tan D. A modal analysis of vibration response of a cracked fluid-filled cylindrical shell. *Applied Mathematical Modelling*. 91, 934-958 (2021).
97. Григоренко А.Я., Пузырев С.В., Волчек Е.А. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации. *Мат. методы та фіз.-мех. поля*. 54 (3), 60-69 (2011).
98. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров. *Прикл. механика*. 44 (10), 74-85 (2008).
99. Ефимова Т.Л. Решение задач о свободных колебаниях толстостенных ортотропных неоднородных цилиндров. *Мат. методы та фіз.-мех. поля*. 52 (1), 92-100 (2009).
100. Hurley D.C., Kopycinska-Müller M., Kos A.B., Geiss R.H. Quantitative elastic-property measurements at the na-noscale with atomic force acoustic microscopy. *Advanced Engineering Materials*. 7 (8), 713-718 (2005).
101. Беспалова Е.И., Бореико Н.П. Собственные частоты составных анизотропных оболочечных систем на основе разных моделей деформирования. *Прикл. механика*. 55(1), 44-59 (2019).
102. Беспалова Е.И., Урусова Г.П. Определение собственных частот существенно неоднородных оболочек вращения с учетом поперечной деформации. *Прикл. механика*. 43 (9), 38-47 (2007).
103. Пузырев С.В. Исследование свободных колебаний гофрированных цилиндрических оболочек. *Теорет. и прикл. механика*. 47 (1), 106-113 (2010).
104. Пузырев С.В. О свободных колебаниях некруговых цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим сечением. *Зб. наук. праць Нац. ун-ту кораблебудування*. № 1, 47-53 (2013).
105. Fang M., Zhu X., Li T., Zhang G. Free vibration characteristics of a finite

- ring-stiffened elliptic cylindrical shell. *Journal of Vibration and Acoustics*, 139(6), 061012 (2017).
106. Mackerle J. Finite element vibration analysis of beams, plates and shells. *Shock and Vibration*. 6 (2), 97-109 (1999).
 107. Liew K.M., Zhao X., Ferreira A.J. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. *Composite Structures*. 93 (8), 2031-2041 (2011).
 108. Amabili M. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge University Press (2008).
 109. Liu Z., Majeed M., Cirak F., N. Simpson R. Isogeometric FEM-BEM coupled structural-acoustic analysis of shells using subdivision surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 113 (9), 1507-1530 (2018).
 110. Alspaugh D.W., Bogdanoff J.L., Goldberg J.E. Modes and frequencies of pressurized conical shells. *Journal of Aircraft*. №1, 372-374 (1964).
 111. Cohen G.A. Computer Analysis of Asymmetrical Deformation of Orthotropic Shells of Revolution. *AIAA Journal*. 2 (5), 932-934 (1964).
 112. Kalnins A. Effect of Bending on Vibration of Spherical Shells. *J. Acoust. Soc. Am.* 3 (1), 74-81 (1964).
 113. Goldberg J.E. Computer Analysis of Shells. In: *Proceedings of Symposium of the Theory of Shells*. Ed. D. Muster Univ. of Houston, Texas. 3-22 (1967).
 114. Cohen G.A. Numerical Integration of Shells Equations Using the Field Method. *Trans. ASME*. 41 (1), 261-266 (1974).
 115. Harb A. Integral equation method for cylindrical shell under axisymmetric loads. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 32 (2002).
 116. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. К.: Академперіодика (2006).
 117. Desai P., Kant T. On numerical analysis of axisymmetric thick circular cylindrical shells based on higher order shell theories by segmentation method. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 17 (2), 130-169 (2015).

118. Кишиник В.Ю., Гнітько В.І., Науменко Ю.В., Розова Л.В. Чисельне моделювання коливань рідини в складених оболонках обертання при перевантаженнях. Прикладні питання математичного моделювання. (1), 115-121 (2018).
119. Zhang C., Jin G., Wang Z., Sun Y. Dynamic stiffness formulation and vibration analysis of coupled conical-ribbed cylindrical-conical shell structure with general boundary condition. *Ocean Engineering*. 234, 109294 (2021).
120. Алифанова О.А., Ингульцев В.Л. Устойчивость и собственные колебания трехслойных оболочек вращения. Сопротивление материалов и теория сооружений. К.: Будивельник. 31, 12-16 (1977).
121. Maksymyuk V., Storozhuk E., Chernyshenko I. Analytical and Numerical Solution of Static Problems of Non-Circular Cylindrical Shells. In: Guz A.N., Altenbach H., Bogdanov V., Nazarenko V.M. (eds) *Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials*, vol 191 (2023).
122. Григоренко Я.М., Будах В.Д., Григоренко О.Я. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів. Миколаїв: Іліон (2010).
123. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Solving the Stress Problem for Hollow Cylinders with Corrugated Elliptical Cross Section. *Int. Appl. Mech.* 40 (2), 169-175 (2004).
124. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Лоза И.А. Об одном подходе к исследованию колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины. *Доп. НАН України*. № 6, 61-67 (2009).
125. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Соколова Л.В. О свободных колебаниях нетонких цилиндрических оболочек переменной толщины на основе метода сплайн-коллокации. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 53 (4), 169-179 (2010).
126. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Соколова Л.В. Об одном подходе к исследованию свободных колебаний цилиндрических оболочек переменной в круговом направлении толщины в уточненной

- постановке. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 52 (3), 103-115 (2009).
127. Григоренко А.Я., Мальцев С.А. Решение задач о свободных колебаниях конических оболочек переменной толщины. Доп. НАН України. № 7, 63-69 (2009).
 128. Григоренко А.Я., Пархоменко А.Ю. Численное решение задачи о свободных колебаниях пологих оболочек переменной толщины в уточненной постановке Доп. НАН України. 12, 50-54 (2009).
 129. Li Q., Chen H., Wang H. A proper orthogonal decomposition-compact difference algorithm for plate vibration models. Numerical Algorithms. 94 (3), 1489-1518 (2023).
 130. Shukla R.K., Zhong X. Derivation of high-order compact finite difference schemes for non-uniform grid using polynomial interpolation. Journal of Computational Physics. 204 (2), 404-429 (2005).
 131. Hamilton B., Torin A. Finite Difference Schemes on Hexagonal Grids for Thin Linear Plates with Finite Volume Boundaries. In DAFx. 5-12 (2014).
 132. Farag A.M., Mohamed W.F., Ata A.A., Burhamy B.M. Numerical Method based on Initial Value-Finite Differences for Free Vibration of Stepped Thickness Plates. In Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology. World Academy of Science, Engineering and Technology (WASET). 73, 28 (2013).
 133. Farag A.M., Mohamed W.F., Ata A.A., Burhamy B.M. Computational Initial Value Method for Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Plate. In Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology World Academy of Science, Engineering and Technology (WASET). 73, 635 (2013).
 134. Wan A.T., Bihlo A., Nave J.C. The multiplier method to construct conservative finite difference schemes for ordinary and partial differential equations. SIAM Journal on Numerical Analysis. 54 (1), 86-119 (2016).
 135. Yu Y., Zhen L. Conservative finite difference schemes for dynamical systems. Discrete and Continuous Models and Applied Computational

- Science. 30(4), 364-373 (2022).
136. Fisher T.C., Carpenter M.H., Nordström J., Yamaleev N.K., Swanson C. Discretely conservative finite-difference formulations for nonlinear conservation laws in split form: Theory and boundary conditions. *Journal of Computational Physics*. 234, 353-375 (2013).
 137. Bilbao S. A family of conservative finite difference schemes for the dynamical von Karman plate equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*. 24 (1), 193-216 (2008).
 138. Bilbao S. Conservative numerical methods for nonlinear strings. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 118 (5), 3316-3327 (2005).
 139. Bilbao S., Smith J.O. Energy-conserving finite difference schemes for nonlinear strings. *Acta acustica united with acustica*. 91 (2), 299-311 (2005).
 140. Koide S., Furihata D. Nonlinear and linear conservative finite difference schemes for regularized long wave equation. *Japan journal of industrial and applied mathematics*. 26 (1), 15 (2009).
 141. Liu X., Wang T., Jin S., Xu Q. Two energy-preserving compact finite difference schemes for the nonlinear fourth-order wave equation. *Communications on Applied Mathematics and Computation*. 4 (4), 1509-1530 (2022).
 142. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Ребристые цилиндрические оболочки. К.: Наук. думка (1973).
 143. Kryvenko O.P., Lizunov P.P., Vorona Y.V., Kalashnikov O.B. Modeling of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibration Processes of Elastic Shells in Inhomogeneous Structure. *International Applied Mechanics*. 60 (4), 464-478 (2024).
 144. Zhang Y., Sun W., Yang J., Han Q. Nonlinear vibration analysis of a hard-coating cylindrical shell with elastic constraints by finite element method. *Nonlinear Dynamics*. 90 (4), 2879-2891 (2017).

145. Huang W., Liu T., Liu Z., Xu P., Liu M., Chen Y., Hsia K.J. Discrete differential geometry-based model for nonlinear analysis of axisymmetric shells. *International Journal of Mechanical Sciences*. 283, 109742 (2024).
146. Kozlov V.I., Zinchuk L.P., Karnaukhova T.V., Sichko V.M. Forced geometrically nonlinear vibrations of thin shells of revolution with piezoelectric layers. *International Applied Mechanics*. 57 (2), 200-216 (2021).
147. Zhang J., Xu J., Yuan X., Ding H., Niu D., Zhang W. Nonlinear vibration analyses of cylindrical shells composed of hyperelastic materials. *Acta Mechanica Sinica*. 32 (4), 463-482 (2019).
148. Dominguez Alvarado A.F., Diaz Diaz A. A mixed stress/displacement approach model of homogeneous shells for Elastodynamic problems. *Mathematical Problems in Engineering*. 1, 5429615 (2020).
149. Dominguez Alvarado A.F., Diaz Diaz A. A stress approach model of moderately thick, homogeneous shells. *Mathematical Problems in Engineering*. 1, 6141683 (2018).
150. Hughes T.J. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Courier Corporation (2003).
151. Adini A. Analysis of shell structures by the finite element method. University of California, Berkeley (1961).
152. Radwańska M., Stankiewicz A., Wosatko A., Pamin, J. Plate and shell structures: selected analytical and finite element solutions. John Wiley & Sons (2017).
153. Chapelle D., Bathe K.J. The finite element analysis of shells-fundamentals. Springer Science and Business Media (2010).
154. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне (1988).
155. Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Вища школа (1982).
156. Ciarlet P.G. The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland (1978).

157. Gallagher R.H. Finite Element Analysis: Fundamentals. Prentice-Hall (1974).
158. Zienkiewicz O. C., Morgan K.J. Finite Elements and Approximation. Dover Books on Engineering (2006).
159. Mitchell A. R. , Wait R. The Finite Element Method in Partial Differential Equations. John Wiley and Sons (1977).
160. Савула Я.Г. Метод скінченних елементів. Київ: НМК ВО (1993).
161. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. Львов: Изд-во Львов. ун-та (1981).
162. Strang G., Fix G.J. An Analysis of the Finite Element Method. Wellesley-Cambridge Press/SIAM (2008).
163. Ramu I., Mohanty S.C. Study on free vibration analysis of rectangular plate structures using finite element method. Procedia engineering. No 38, 2758-2766 (2012).
164. Kumar A., Shrivastava R.P. Free vibration of square laminates with delamination around a central cutout using HSDT. Composite Structures. 70 (3), 317-333 (2005).
165. Hamedani S.J., Khedmati M.R., Azkat S. Vibration analysis of stiffened plates using finite element method. Latin American Journal of Solids and Structures. No 9, 1-20. (2012).
166. Bardell, N. S. Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method. J. Sound Vib.. 151 (2), 263-289 (1991).
167. Dawe D.J. A Finite Element Approach to Plate Vibration Problems. Journal of Mechanical Engineering Science. 7 (1), 28-32 (1965).
168. Семенюк Н.П., Бабич И.Ю., Жукова Н.Б. Свободные колебания гофрированных цилиндрических оболочек. Прикл. механика. 41 (5). 58-67 (2005).
169. Wang J., Yong, Y.K., Imai T. Finite element analysis of the piezoelectric vibrations of quartz plate resonators with higher-order plate theory. International Journal of Solids and Structures. 36 (15), 2303-2319 (1999).
170. Chandrashekhara K., Agarwal, A.N. Active vibration control of laminated

- composite plates using piezoelectric devices: a finite element approach. *Journal of intelligent material systems and structures*. 4 (4), 496-508 (1993).
171. Zhu P., Lei Z.X., Liew K.M. Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory. *Composite Structures*. 94 (4), 1450-1460 (2012).
 172. Ganesh S., Kumar K.S., Mahato P.K. Free vibration analysis of delaminated composite plates using finite element method. *Procedia Engineering*. No 144, 1067-1075 (2016).
 173. Ju F., Lee H.P., Lee K.H. Finite element analysis of free vibration of delaminated composite plates. *Composites engineering*. 5 (2), 195-209 (1995).
 174. Bachene M., Tiberkak R., Rechak S. Vibration analysis of cracked plates using the extended finite element method. *Archive of Applied Mechanics*. No 79, 249-262 (2009).
 175. Guan-Liang Q., Song-Nian G., Jie-Sheng J. A finite element model of cracked plates and application to vibration problems. *Computers & Structures*. 39 (5), 483-487 (1991).
 176. Oñate E. *Structural analysis with the finite element method: linear statics*. Dordrecht: Springer Netherlands (2009).
 177. Shrikhande M. *Finite element method and computational structural dynamics*. PHI Learning Pvt. Ltd. (2014).
 178. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method set*. Elsevier(2005).
 179. Bucelem M.L., Bathe K.J. Finite element analysis of shell structures. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 4 (1), 3-61 (1997).
 180. Гончаренко И.Е. Метод конечных элементов в исследовании процессов осесимметричного деформирования конструкций при ударных воздействиях. *Динамика пространственных конструкций*. К.: КИСИ. 17-20 (1978).

181. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений. Сопротивление материалов и теория сооружений. К.: Будівельник. №2, 147-156 (1974).
182. Rawat A., Matsagar V.A., Nagpal A.K. Free vibration analysis of thin circular cylindrical shell with closure using finite element method. International Journal of Steel Structures. 20 (1), 175-193 (2020).
183. Luah M.H., Fan S.C. General free vibration analysis of shells of revolution using the spline finite element method. Computers & structures. 33 (5), 1153-1162 (1989).
184. Lee Y.S., Yang M.S., Kim H.S., Kim J.H. A study on the free vibration of the joined cylindrical–spherical shell structures. Computers & Structures. 80 (27-30), 2405-2414 (2002).
185. Izadi M.H., Hosseini-Hashemi S., Korayem M.H. Analytical and FEM solutions for free vibration of joined cross-ply laminated thick conical shells using shear deformation theory. Archive of Applied Mechanics. No 88, 2231-2246 (2018).
186. Halder S. Free vibration of composite skewed cylindrical shell panel by finite element method. J. Sound Vib.. 311 (1-2), 9-19 (2008).
187. Chakravorty D., Bandyopadhyay J.N., Sinha P. Finite element free vibration analysis of doubly curved laminated composite shells. J. Sound Vib.. 191 (4), 491-504 (1996).
188. Ram K.S., Babu T.S. Free vibration of composite spherical shell cap with and without a cutout. Computers & structures. 80 (23), 1749-1756 (2002).
189. Wang X.H., Xu B., Redekop D. FEM free vibration and buckling analysis of stiffened toroidal shells. Thin-walled structures. 44 (1), 2-9 (2006).
190. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. К. НТУУ «КПИ» (2011).
191. Madenci E., Guven I. The finite element method and applications in engineering using ANSYS®. Springer (2015).
192. Bathe K.J. ADINA–Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis,

- Version 8.6. 0, ADINA R&D. Inc. Watertown, MA (2009).
193. MacNeal R. The NASTRAN theoretical manual. Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration. Vol. 221 (1970).
 194. Knott G.A. A modal analysis of the violin using MSC/NASTRAN and PATRAN. Diss. Monterey, California: Naval Postgraduate School (1987).
 195. Abaqus G. Abaqus 6.11. Dassault Systemes Simulia Corporation, Providence, RI, USA (2011).
 196. Murray Y.D. Users manual for LS-DYNA concrete material model 159. United States. Federal Highway Administration. Office of Research, Development, and Technology (2007).
 197. Zamani N.G. CATIA V5 FEA tutorials: release 19. SDC Publications (2010).
 198. Köhler, P. (ed.). Pro/ENGINEER-Praktikum. Wiesbaden: Vieweg+ Teubner (2006).
 199. Andrews P.S., Polack F.A., Sampson A.T., Stepney S., Timmis J. The CoSMoS process, version 0.1: A process for the modelling and simulation of complex systems. Technical Report YCS-2010-453, Department of Computer Science, University of York. Vol. 98 (2010).
 200. Rao J. S. Kinematics of machinery through HyperWorks. Springer Science & Business Media. Vol. 18 (2011).
 201. Гоменюк С.І., Гребенюк С.М., Манько Н.І.-В., Литвиненко О.Г. Прикладні питання математичного моделювання. 8(13), 17–24 (2018).
 202. Стрижало В.О., Бородій М.В. Експериментальні методи в механіці деформівного твердого тіла (2022).
 203. Bray F.M., Egle D.M. An experimental investigation of the free vibration of thin cylindrical shells with discrete longitudinal stiffening. Journal of Sound and Vibration. 12 (2), 153-164 (1970).
 204. Sewall J.L., Naumann E.C. An experimental and analytical vibration study of thin cylindrical shells with and without longitudinal stiffeners. Vol. 4705. National Aeronautic and Space Administration (1968).

205. Sewall J.L., Thompson W.M., Pnsey C.G. An experimental and analytical vibration study of elliptical cylindrical shells. NASA TN D-6089 (1971).
206. Ma C.C., Huang C.H. Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plates. *J. Sound Vib.* 271 (3-5), 493-506 (2004).
207. Ma C.C., Lin C.C. Experimental investigation of vibrating laminated composite plates by optical interferometry method. *AIAAJ.* 39 (3), 491-497 (2001).
208. Waller M.D. Vibrations of free plates: line symmetry; corresponding modes. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathem. and Physic. Sci.* 211 (1105), 265-276 (1952).
209. Андрєєв А.Г., Львов Г.І., Щепкін О.В. Тензометрія: підручник. Харків: НТУ «ХПІ» (2017).
210. Hoffmann K., et al. An introduction to measurements using strain gages. Darmstadt: Hottinger Baldwin Messtechnik (1989).
211. Agoston, K. Vibration detection of the electrical motors using strain gauges. *Procedia technology*, 22, 767-772 (2016).
212. The Japanese Society for Non-Destructive Inspection (Eds.). *Practical Acoustic Emission Testing*. Springer Tokyo (2016).
213. Veksler N.D. *Resonance acoustic spectroscopy*. Vol. 11. Springer Science & Business Media (2012).
214. Grosse C.U., Ohtsu M., Aggelis D.G., Shiotani T. (Eds.). *Acoustic emission testing: Basics for research-applications in engineering*. Springer Nature (2021).
215. Marchand V., Authesserre J., Pouyet J., Bacon C. Determination of the elastic constants of materials, in the form of plates, by a free vibration method. *Journal of sound and vibration*, 194 (4), 497-512 (1996).
216. Lytra A., Sboros V., Giannakopoulos A., Pelekasis N. Modeling atomic force microscopy and shell mechanical properties estimation of coated microbubbles. *Soft Matter*. 16 (19), 4661-4681 (2020).
217. Rabe U. Atomic Force Acoustic Microscopy. In: Bhushan, B., Fuchs, H. (eds) *Applied Scanning Probe Methods II. NanoScience and Technology*. Springer,

- Berlin, Heidelberg. 37-90 (2006).
218. Raigoza A.F., Dugger J.W., Webb L.J. Recent advances and current challenges in scanning probe microscopy of biomolecular surfaces and interfaces. *ACS Applied Materials & Interfaces*, 5 (19), 9249-9261 (2013).
 219. Laskar M.R., Celano U. Scanning probe microscopy in the age of machine learning. *APL Mach. Learn.*, 1, 041501 (2023).
 220. Crut A., Maioli P., Del Fatti N., Vallée, F. Acoustic vibrations of metal nano-objects: Time-domain investigations. *Physics Reports*. 549, 1-43 (2015).
 221. Del Fatti N., Voisin C., Chevy F., Vallée F., Flytzanis C. Coherent acoustic mode oscillation and damping in silver nanoparticles. *The Journal of chemical physics*. 110 (23), 11484-11487 (1999).
 222. Guillet Y., Audoin B., Ferrié M., Ravaine S. All-optical ultrafast spectroscopy of a single nanoparticle-substrate contact. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*. 86 (3), 035456 (2012).
 223. Sun J.Y., Wang Z.K., Lim H.S., Zhang V.L., Ng S.C., Kuok M.H., Lu X.M. Brillouin study of confined eigenvibrations of silver nanocubes. *Solid state communications*. 152 (6), 501-503 (2012).
 224. Kino G.S. *Acoustic Waves: Devices, Imaging and Analog Signal Processing*. Prentice-Hall, Signal Processing Series (1987).
 225. Романько В.Н., Корецкий Э.А., Скляров В.В. Определение собственных частот и декрементов затухания методом авторегрессионного спектрального анализа. *Український метрологічний журнал*. № 2, 4-9 (2012).
 226. Vest C.M. *Holographic Interferometry*. John Wiley and Sons (1979).
 227. Jones R., & Wykes C. *Holographic and speckle interferometry*. Cambridge university press (1989).
 228. Francon M. *Holographie*. Springer Verlag, Berlin (1972).
 229. Bjelkhagen H.I. Denisyuk color holography for display, documentation and measurement. *Journal of Holography and Speckle*. 5 (1), 33-41 (2009).

230. Maruyama K. Measurements of Vibrational Modes of Thin Plate by Holographic Interferometry, Part I. Clamped Circular Plate. Memoirs of Hokkaido Institute of Technology. 3, 185-196 (1975).
231. Maruyama K., Ichinomiya O. Measurements of Vibrational Modes of Thin Plate by Holographic Interferometry, Part II. Clamped Rectangular Plates. Preprint of Japan Society of Mechanical Engineering. 750-10,89-92 (1975).
232. Шалабанов А.К. Исследование высокочастотных колебаний цилиндрических оболочек на основе двух методов голографической интерферометрии. Исслед. по теор. пластин и оболочек. 14, 184-190 (1979).
233. Kairov A.S. An experimeental study of the natural vibrations of supported shells. Journal of Mathematical Sciences. 77 (6), 3533-3536 (1995).
234. Kairov A.S. An experimental study of the vibrations of cylindrical shells with holes. Journal of Mathematical Sciences. 90 (1), 1879-1882 (1998).
235. Будак В.Д. Золотой Ю.Г., Овчаренко А.В. Колебания круглой цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Збірник наукових праць УДМТУ. Миколаїв: УДМТУ. №4, 135-141 (1998).
236. Каиров А.С., Золотой Ю.Г. Определение виброперемещений и напряжений при колебаниях конструктивно неоднородных оболочек методом голографической интерферометрии. Теорет. и прикл. механика. №28, 112-118 (1998).
237. Григоренко А.Я., Золотой Ю.Г., Пригода А.П., Жук И.Ю., Хоришко В.В., Овчаренко А.В. Экспериментальное исследование собственных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки методом голографической интерферометрии. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 55 (3), 93-98 (2012).
238. Mindle W.L., Torvik P.J. A comparison of NASTRAN (Cosmic) and experimental results for the vibration of thick open cylindrical cantilevered shells. In COSMIC 14th NASTRAN (R) Users' Colloquium (1986).
239. Моргун С.А., Каиров А.С. Экспериментальное исследование свободных колебаний лопаток газотурбинного двигателя. Методи розв'язання

прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. №12, 224-229 (2011).

240. Ткач М.Р., Золотой Ю.Г., Довгань Д.В. Повышение точности вибродиагностики голографической интерферометрией рабочих лопаток компрессоров ГТД в условиях резонансной вибрации. Авиационно-космическая техника и технология. №8, 48-54 (2010).
241. Ткач М.Р., Золотой Ю.Г., Довгань Д.В., Жук И.Ю. Исследование форм собственных колебаний элементов ГТД методом голографической интерферометрии в реальном времени. Авиационно-космическая техника и технология. №8, 51-56 (2011).
242. Ткач М.Р., Золотой Ю.Г., Довгань Д.В., Жук И.Ю. Автоматизация определения собственных частот и форм колебаний элементов турбин малой мощности. Авиационно-космическая техника и технология. №9, 242-248 (2013).
243. Ткач М.Р., Золотой Ю.Г., Довгань Д.В., Жук И.Ю. Определение форм собственных колебаний элементов ГТД в реальном времени методом электронной спекл-интерферометрии. Авиационно-космическая техника и технология. №8, 203-207 (2012).
244. Romero G., Alvarez L., Alanis E., Nallim L., Grossi R. Study of a vibrating plate: comparison between experimental (ESPI) and analytical results. Optics and lasers in engineering. 40 (1-2), 81-90 (2003).
245. Huang C.H. Experimental measurements by an optical method of resonant frequencies and mode shapes for square plates with rounded corners and chamfers. J. Sound Vib.. 253 (3), 571-583 (2002).
246. Huang C.H., Ma C.C. Experimental measurement of mode shapes and frequencies for vibration of plates by optical interferometry method. J. Vib. Acoust. 123 (2), 276-280 (2001).
247. Dai X., Shao X., Geng Z., Yang F., Jiang Y., He X. Vibration measurement based on electronic speckle pattern interferometry and radial basis function. Optics Communications. 355, 33-43 (2015).

248. Li X.N., Sung P.C., Patterson E.A., Wang W.C., Christian W.J.R. Identification of defects in composite laminates by comparison of mode shapes from electronic speckle pattern interferometry. *Optics and Lasers in Engineering*. 163, 107444 (2023).
249. Kumar R., Singh S.K., Shakher C. Wavelet filtering applied to time-average digital speckle pattern interferometry fringes. *Optics & Laser Technology*. 33 (8), 567-571 (2001).
250. Shakher C., Kumar R., Singh S.K., Kazmi S.A. Application of wavelet filtering for vibration analysis using digital speckle pattern interferometry. *Optical Engineering*. 41 (1), 176-180 (2002).
251. Kumar R., Singh I.P., Shakher C. Measurement of out-of-plane static and dynamic deformations by processing digital speckle pattern interferometry fringes using wavelet transform. *Optics and lasers in engineering*. 41 (1), 81-93 (2004).
252. Kumar R., Shakher C. Application of digital speckle pattern interferometry and wavelet transform in measurement of transverse vibrations in square plate. *Optics and lasers in engineering*. 42 (5), 585-602 (2004).
253. Mirza S., Singh P., Kumar R., Vyas A.L., Shakher C. Measurement of transverse vibrations/visualization of mode shapes in square plate by using digital speckle pattern interferometry and wavelet transform. *Optics and Lasers in Engineering*. 44 (1), 41-55 (2006).
254. Devila A., Kaufmann G.H., Kerr D. An evaluation of synthetic aperture radar noise reduction techniques for the smoothening of electronic speckle pattern interferometric fringes. *J. Mod. Opt.* 42 (9), 1795-1804 (1995).
255. Shakher C., Kumar R. Application of digital speckle pattern interferometry (DSPI) in determination of elastic modulus using plate vibration. In *Recent Advances in Mechanics*. 329-341 (2011).
256. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок. Київ: Либідь (1993).
257. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Т3. М.:

Машиностроение (1988).

258. Blanche P.A. (Ed.). Optical holography: Materials, theory and applications. Elsevier (2019).
259. Kostuk R.K. Holography: Principles and Applications. Taylor & Francis (2024).
260. Hitz C.B., Ewing J.J., Hecht J. Introduction to laser technology. John Wiley & Sons (2012).
261. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин з вільними краями. Мат. методи та фіз.-мех. Поля. 63 (3), 28-39 (2020).
Te same: Grigorenko O.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V. Numerical Evaluation of Frequencies and the Modes of Free Vibrations of Isosceles Triangular Plates with Free Edges. J. Math. Sci. 273, 27-43 (2023).
262. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Новицький В.С. Чисельний аналіз вільних коливань прямокутних пластин на основ різних підходів. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. Вип. 1, 33-41 (2019).
263. Борисенко М.Ю. Бойчук О.В., Пригода О.П., Борисенко І.А. Комп'ютерне моделювання вільних коливань квадратних та круглих пластин. В: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Інформаційні технології в моделюванні. ІТМ – 2016», Миколаїв, 24-25 березня 2016 р., 14 (2016).
264. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Визначення частот вільних коливань чотирикутних пластин складної форми. В: Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2019», Дніпро, Кам'янське, 15-18 квітня 2019 р., 40-41 (2019).
265. Борисенко М.Ю. Бойчук О.В., Борисенко І.А., Роговцов Ю.О. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів. Геометричне моделювання та інформаційні технології. Вип. 2, 29-33 (2016).

266. Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борисенко І.А., Роговцов Ю.О. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів. В: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделювання об'єктів, явищ і процесів», Миколаїв, 19-21 жовтня 2016 р., 16 (2016).
267. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин методом скінченних елементів. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Вип. 1-2, 61-66 (2020).
268. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Сперкач С.О., Безугла А.Д., Міхрін Е.О. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин. Доп. НАН України. № 6, 36-45 (2022).
269. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин методом скінченних елементів. В: Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні», Харків, 05-08 жовтня 2020 р., 45-46 (2020).
270. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Борецько Н.П., Бабуров В.В. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин з жорстко закріпленням одним краєм. Прикл. механіка. 61 (1), С. 35-44 (2025).
271. Grigorenko A., Borysenko M., Boychuk O., Boreiko N. Numerical Analysis of Free Vibration Frequencies of Hexagonal Plate. In: Altenbach H., Bogdanov V., Grigorenko A.Y., Kushnir R.M., Nazarenko V.M., Eremeyev V.A. (eds) Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials, vol. 204. Springer, Cham. 201-220 (2024).
272. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Визначення частот і форм вільних коливань шестикутної пластини з вільними краями. В: Тези доповіді Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2021», Дніпро, Кам'янське, 13-16 квітня 2021 р., 37-38 (2021).

273. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борейко Н.П. Вільні коливання шестикутних пластин з різними варіантами закріплення країв. В: Тези доповіді Міжнародної наукової конференції «Механіка: сучасність і перспективи – 2024», Київ, 7-11 жовтня 2024р., 163-164 (2024).
274. Borysenko M, Zavhorodnii A., Skupskyi R. Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone. J. Appl. Math. Comput. Mech. 18 (1), 5-13 (2019).
275. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання трикутних пластин з отвором. Прикл. механіка. 57 (5), 46-56 (2021).
Te same: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Vasil'eva L.Ya. Free Vibrations of Triangular Plates with a Hole. Int. Appl. Mech. 57 (5), 534-542 (2021).
276. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Вільні коливання п'ятикутних пластин з отвором. Доп. НАН України. № 1, 24-31 (2023).
277. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Борейко Н. Вільні коливання шестикутних пластин з отвором. В: Збірник матеріалів міжнародної науково-технічної конференції «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення», Дніпро, 26-28 березня 2025р., 60-62 (2025).
278. Борисенко М. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин. В: Матеріалах конференції молодих учених «Підстригачівські читання – 2022», Львів, 25–27 травня 2022 р. (2022).
279. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Новицький В.С. Застосування експериментального і чисельного методів до дослідження вільних коливань прямокутних пластин. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Вип. 29, 103-112 (2019).
280. Grigorenko A.Ya., Muller W.H., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V. Numerical and Experimental Approaches to Determining the Frequencies of Free

Vibrations of Plates of Complex Shape. В: Матеріали VI Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки», Київ, 30-31 серпня 2021 р. (2021).

281. Будаk В.Д., Овчаренко А.В. Исследование резонансных свойств цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Збірник наукових праць УДМТУ. Миколаїв: УДМТУ. 2, 111-118 (1999).
282. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Пригода О.П. Чисельний розрахунок частот вільних коливання некругової циліндричної оболонки з жорстко закріпленими торцями. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. Вип. 1, 91-103 (2017).
283. Будаk В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот вільних коливань некругових циліндричних оболонок з жорстко закріпленими торцями. В: Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2016», Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 18-21 квітня 2016 р., 11 (2016).
284. Будаk В.Д., Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В. Розв'язування задачі про вільні коливання некругової циліндричної оболонки на основі методу скінченних елементів. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Вип. 27, 24-33 (2017).
285. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання незамкнутих циліндричних оболонок різного еліптичного поперечного перерізу. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 65 (1-2), 188-198 (2022).
 The same: Grigorenko O.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Ya. Free Vibrations of Open Cylindrical Shells with Various Elliptic Cross Sections. J. Math. Sci. 282, 836-848 (2024).
286. Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В. Свободные колебания незамкнутой цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения. Прикл. механика. 56 (4), 3-14 (2020).

- Te same: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Free Vibrations of an Open Elliptical Cylindrical Shell. *Int. Appl. Mech.* 56 (4), 389-401 (2020).
287. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання незамкненої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу. В: Матеріали IV Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки», Київ, 20-30 серпня 2017 р., 28 (2017).
288. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельний аналіз вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* Вип. 2, 51-58 (2019).
289. Будак В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот вільних коливань некругових циліндричних оболонок змінної товщини з жорстко закріпленими торцями. В: Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних та фізико-математичних наук», Миколаїв, 22-24 вересня 2016 р., 113-114 (2016).
290. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Y. Free Vibrations of an Open Non-circular Cylindrical Shell of Variable Thickness. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W. (eds) *Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials*, vol 134. Springer, Cham. 141-154 (2020).
291. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Шумська А.А. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань гофрованих замкнутих циліндричних оболонок. *Прикл. механіка.* 58 (5), 27-38 (2022).
- Te same: Grigorenko O.Y., Borisenko M.Y., Boichuk O.V., Shums'ka A.A. Numerical determination of natural frequencies and modes of closed corrugated cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.* 58 (5), 520-532 (2022).
292. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Шумська А.А. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань гофрованих замкнутих циліндричних оболонок. *Прикл. механіка.* 58 (5), 27-38 (2022).

Te same: Grigorenko O.Y., Borisenko M.Y., Boichuk O.V., Shums'ka A.A. Numerical determination of natural frequencies and modes of closed corrugated cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.* 58 (5), 520-532 (2022).

293. Khalifa A.M. Solving the vibration problem of inhomogeneous orthotropic cylindrical shells with hoop-corrugated oval cross section. *Comptes Rendus Mécanique*. 343 (9), 482-494 (2015).

294. Kalnins, A. Free vibration of rotationally symmetric shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36(7), 1355-1365 (1964).

295. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Про вільні коливання гофрованої замкнутої циліндричної оболонки. *Прикл. механіка*. 58 (1), С. 48-58 (2022).

Te same: Grigorenko O.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk O.V. Free Vibrations of a Corrugated Closed Cylindrical Shell. *Int. Appl. Mech.* 58 (1), 43-52 (2022).

296. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань циліндричної оболонки з круговим гофрованим перерізом. В: *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т., Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*. Т. 2, 124-125 (2018).

297. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Борецько Н. Вільні коливання гофрованої замкнутої циліндричної оболонки змінної товщини. В: *Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023»*, Львів, 23-25 травня 2023 р., 99-100 (2023)

298. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Boreiko N.P. Free Vibration Corrugated Open Cylindrical Shells. In: Altenbach H., Bauer S., Eremeyev V., Mikhasev G., Morozov N. (eds) *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. Advanced Structured Materials*, vol. 151. Springer, Cham. 63-74 (2021).

299. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Чисельне визначення частот вільних коливань гофрованої незамкнутої циліндричної оболонки. *Доп. НАН України*. № 2, 47-54 (2023).

300. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О. Чисельний аналіз вільних коливань тонкостінних та товстостінних циліндричних оболонок. В: Тези доповіді 11-тої Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», Львів, 24-26 вересня 2024р., 77-78 (2024).
301. Ротко С.В., Ужегова О.А., Задорожнікова І.В. Розрахунок кам'яних і армокам'яних конструкцій: Навчальний посібник. За редакцією д.т.н., проф. Барашикова А.Я. Луцьк: РВВ ЛНТУ (2010).
302. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Пінчук Т. Застосування чисельного аналізу до визначення частот вільних коливань товстостінних оболонок. В: Збірник наукових праць «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук», Львів, 27-28 вересня 2021 р. 88-91 (2021).
303. Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В., Пригода А.П. Численное определение частот и форм свободных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки. Прикл. механика. 54 (1), 90-100 (2018).
- Te same: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Prigoda A.P. Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell. Int. Appl. Mech. 54 (1), 75-84 (2018).

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Статті в закордонних виданнях

1. Borysenko M, Zavorodnii A., Skupskyi R. Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone. J. Appl. Math. Comput. Mech. **18** (1), 5-13 (2019). <https://doi.org/10.17512/jamcm.2019.1.01> (**Web of Science**)
2. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Y. Free Vibrations of an Open Non-circular Cylindrical Shell of Variable Thickness. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W. (eds) Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials, vol 134. Springer, Cham. 141-154 (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_8 (**Scopus, Q4, SJR – 0.168**)
3. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Boreiko N.P. Free Vibration Corrugated Open Cylindrical Shells. In: Altenbach H., Bauer S., Eremeyev V., Mikhasev G., Morozov N. (eds) Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. Advanced Structured Materials, vol 151. Springer, Cham. 63-74 (2021). https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_6 (**Scopus, Q4, SJR – 0.168**)
4. Grigorenko A., Borysenko M., Boychuk O., Boreiko N. Numerical Analysis of Free Vibration Frequencies of Hexagonal Plate. In: Altenbach H., Bogdanov V., Grigorenko A.Y., Kushnir R.M., Nazarenko V.M., Eremeyev V.A. (eds) Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials, vol 204. Springer, Cham. 201-220 (2024). https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_15 (**Scopus, Q4, SJR – 0.168**)

Статті у фахових наукових виданнях України

5. Будаk В.Д., Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В. Розв'язування задачі про вільні коливання некругової циліндричної оболонки на основі методу скінченних елементів. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Вип. 27, 24-33 (2017).
6. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Пригода О.П. Чисельний розрахунок частот вільних коливання некругової циліндричної оболонки з жорстко закріпленими торцями. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. Вип. 1, 91-103 (2017).
7. Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В., Пригода А.П. Численное определение частот и форм свободных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки. Прикл. механика. **54** (1), 90-100 (2018).
 Те саме: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Prigoda A.P. Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell. Int. Appl. Mech. **54** (1), 75-84 (2018).
<https://doi.org/10.1007/s10778-018-0861-7> (**Scopus, Q3, SJR – 0.211**)
8. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Новицький В.С. Застосування експериментального і чисельного методів до дослідження вільних коливань прямокутних пластин. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Вип. 29, 103-112 (2019).
<https://doi.org/10.15421/4219009>
9. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельний аналіз вільних коливань незамкнутих циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Вип. 2, 51-58 (2019).
<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/2.5>
10. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Новицький В.С. Чисельний аналіз вільних коливань прямокутних пластин на основ різних підходів. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-

математичні науки. Вип. 1, 33-41 (2019). <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2019-1-05>

11. Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В. Свободные колебания незамкнутой цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения. Прикл. механика. **56** (4), 3-14 (2020).
 Те саме: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Free Vibrations of an Open Elliptical Cylindrical Shell. Int. Appl. Mech. **56** (4), 389-401 (2020).
<https://doi.org/10.1007/s10778-020-01023-9> (**Scopus, Q3, SJR – 0.218**)
12. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин методом скінченних елементів. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Вип. 1-2, 61-66 (2020).
<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.10>
13. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин з вільними краями. Мат. методи та фіз.-мех. Поля. **63** (3), 28-39 (2020).
 Те саме: Grigorenko O.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V. Numerical Evaluation of Frequencies and the Modes of Free Vibrations of Isosceles Triangular Plates with Free Edges. J. Math. Sci. **273**, 27-43 (2023).
<https://doi.org/10.1007/s10958-023-06481-3> (**Scopus, Q3, SJR – 0.302**)
14. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання трикутних пластин з отвором. Прикл. механіка. **57** (5), 46-56 (2021).
 Те саме: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Vasil'eva L.Ya. Free Vibrations of Triangular Plates with a Hole. Int. Appl. Mech. **57** (5), 534-542 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01104-3> (**Scopus, Q3, SJR – 0.242**)
15. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Про вільні коливання гофрованої замкнутої циліндричної оболонки. Прикл. механіка. **58** (1), С. 48-58 (2022).
 Те саме: Grigorenko O.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk O.V. Free Vibrations of a Corrugated Closed Cylindrical Shell. Int. Appl. Mech. **58** (1), 43-52 (2022).

<https://doi.org/10.1007/s10778-022-01133-6> (**Scopus, Q3, SJR – 0.225**)

16. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Сперкач С.О., Безугла А.Д., Міхрін Е.О. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин. Доп. НАН України. № 6, 36-45 (2022).
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.036>
17. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання незамкнених циліндричних оболонок різного еліптичного поперечного перерізу. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **65** (1-2), 188-198 (2022). <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.1-2.188-198>
Te same: Grigorenko O.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Ya. Free Vibrations of Open Cylindrical Shells with Various Elliptic Cross Sections. J. Math. Sci. **282**, 836-848 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07219-5> (**Scopus, Q3, SJR – 0.280**)
18. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Шумська А.А. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань гофрованих замкнутих циліндричних оболонок. Прикл. механіка. **58** (5), 27-38 (2022).
Te same: Grigorenko O.Y., Borisenko M.Y., Boichuk O.V., Shums'ka A.A. Numerical determination of natural frequencies and modes of closed corrugated cylindrical shells. Int. Appl. Mech. **58** (5), 520-532 (2022).
<https://doi.org/10.1007/s10778-023-01177-2> (**Scopus, Q3, SJR – 0.225**)
19. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Вільні коливання п'ятикутних пластин з отвором. Доп. НАН України. № 1, 24-31 (2023). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.024>
20. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Чисельне визначення частот вільних коливань гофрованої не замкнутої циліндричної оболонки. Доп. НАН України. № 2, 47-54 (2023).
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.047>
21. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Борецько Н.П., Бабуров В.В. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин з жорстко закріпленням одним краєм. Прикл. механіка. **61** (1), С. 35-44 (2025).

Статті в наукових виданнях України

22. Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борисенко І.А., Роговцов Ю.О. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів. Геометричне моделювання та інформаційні технології. Вип. 2, 29-33 (2016).

Праці апробаційного характеру

23. Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Пригода О.П., Борисенко І.А. Комп'ютерне моделювання вільних коливань квадратних та круглих пластин. В: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Інформаційні технології в моделюванні. ІТМ – 2016», Миколаїв, 24-25 березня 2016 р., 14 (2016).
24. Будає В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот вільних коливань некругових циліндричних оболонок з жорстко закріпленими торцями. В: Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2016», Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 18-21 квітня 2016 р., 11 (2016).
25. Будає В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот вільних коливань некругових циліндричних оболонок змінної товщини з жорстко закріпленими торцями. В: Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних та фізико-математичних наук», Миколаїв, 22-24 вересня 2016 р., 113-114 (2016).
26. Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борисенко І.А., Роговцов Ю.О. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів. В: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделюванні об'єктів, явищ і процесів», Миколаїв, 19-21 жовтня 2016 р., 16 (2016).
27. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання незамкненої циліндричної оболонки еліптичного поперечного

- перерізу. В: Матеріали IV Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки», Київ, 20-30 серпня 2017 р., 28 (2017).
28. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вільні коливання циліндричних оболонок з некруговим гофрованим перерізом. В: Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук», Миколаїв, 13-15 вересня 2018 р., 33 (2018).
29. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань циліндричної оболонки з круговим гофрованим перерізом. В: Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т., Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Т. 2, 124-125 (2018).
30. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Визначення частот вільних коливань чотирикутних пластин складної форми. В: Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2019», Дніпро, Кам'янське, 15-18 квітня 2019 р., 40-41 (2019).
31. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин методом скінченних елементів. В: Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні», Харків, 05-08 жовтня 2020 р., 45-46 (2020).
32. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Визначення частот і форм вільних коливань шестикутної пластини з вільними краями. В: Тези доповіді Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2021», Дніпро, Кам'янське, 13-16 квітня 2021 р., 37-38 (2021).
33. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Пінчук Т. Застосування чисельного аналізу до визначення частот вільних коливань товстостінних оболонок. В: Збірник наукових праць «Сучасні проблеми прикладної математики та

комп'ютерних наук», Львів, 27-28 вересня 2021 р. 88-91 (2021).

34. Grigorenko A.Ya., Muller W.H., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V. Numerical and Experimental Approaches to Determining the Frequencies of Free Vibrations of Plates of Complex Shape. В: Матеріали VI Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки», Київ, 30-31 серпня 2021 р. (2021).
35. Борисенко М. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин. В: Матеріалах конференції молодих учених «Підстригачівські читання – 2022», Львів, 25–27 травня 2022 р. (2022).
36. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Борецько Н. Вільні коливання гофрованої замкнутої циліндричної оболонки змінної товщини. В: Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023», Львів, 23-25 травня 2023 р., 99-100 (2023).
37. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О. Чисельний аналіз вільних коливань тонкостінних та товстостінних циліндричних оболонок. В: Тези доповіді 11-тої Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», Львів, 24-26 вересня 2024р., 77-78 (2024).
38. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борецько Н.П. Вільні коливання шестикутних пластин з різними варіантами закріплення країв. В: Тези доповіді Міжнародної наукової конференції «Механіка: сучасність і перспективи – 2024», Київ, 7-11 жовтня 2024р., 163-164 (2024).
39. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Борецько Н. Вільні коливання шестикутних пластин з отвором. В: Збірник матеріалів міжнародної науково-технічної конференції «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення», Дніпро, 26-28 березня 2025р., 60-62 (2025).

ДОДАТОК Б

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ

Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях, зокрема:

- Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Інформаційні технології в моделюванні. ІТМ – 2016» (Миколаїв, 2016);
- Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки» (Дніпропетровськ/Дніпро, Дніпродзержинськ/Кам'янське, 2016, 2019, 2021);
- Міжнародна науково-практична конференція «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних та фізико-математичних наук» (Миколаїв, 2016, 2018);
- Всеукраїнська науково-практична конференція «Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделювання об'єктів, явищ і процесів» (Миколаїв, 2016);
- IV, VI Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2017, 2021);
- Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2018, 2023);
- II Міжнародна науково-технічна конференція «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 2020);
- XXVI Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук» (Львів, 2021);
- Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022» (Львів, 2022);
- Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2024р);

- Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність і перспективи – 2024» (Київ, 2024);
- Міжнародна науково-технічна конференція «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення» (Дніпро, 2025р).

У повному обсязі дисертація доповідалась та обговорювалась на

- науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професор О.Я. Григоренко, 2025 р.);
- науковому семінарі за напрямом «Механіка оболонкових систем» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.т.н., професор П.З. Луговий, 2025 р.);
- загальноінститутському семінарі з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор В.М. Назаренко, 2025 р.);
- науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету (керівник – д.ф.-м.н., професор І.А. Лоза, 2025 р.);
- науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (керівник – чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професор Я.О. Жук, 2025 р.).